

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ВЛАДИВОСТОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

*«ОП.08 Математика в профессиональной деятельности учителя»*

программы подготовки специалистов среднего звена

*44.02.02 Преподавание в начальных классах*

Форма обучения: *очно*

Владивосток 2023

Рабочая программа учебной дисциплины «ОП.08 Математика в профессиональной деятельности учителя» разработана в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 44.02.02 «Преподавание в начальных классах», утвержденного приказом Минобрнауки России от 17.08.2022, №742, примерной образовательной программой.

Разработчик(и):

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии  
Протокол № 9 от «16» мая 2023 г.

Председатель ЦМК  А.Д. Гусакова

*подпись*

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1</b>	<b>ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ</b>	<b>12</b>

# 1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

## 1.1 Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Учебная дисциплина «ОП.08 Математика в профессиональной деятельности учителя» является частью общепрофессионального учебного цикла основной образовательной программы (далее ООП) в соответствии с ФГОС СПО по специальности 44.02.02 «Преподавание в начальных классах».

## 1.2 Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

По итогам освоения дисциплины, обучающиеся должны продемонстрировать результаты обучения, соотнесённые с результатами освоения ООП СПО, приведенные в таблице.

Код компетенции	Умения	Знания
ОК 1 ОК 4 ПК 1.1 ПК 1.3 ПК 1.6 ПК 1.7 ПК 1.8	<ul style="list-style-type: none"><li>– распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте;</li><li>– анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;</li><li>– определять этапы решения задачи;</li><li>– выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы;</li><li>– владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;</li><li>– реализовывать составленный план;</li><li>– оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника);</li><li>– организовывать работу коллектива и команды;</li><li>– взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности;</li><li>– определять цели и задачи урока, планировать его с учетом особенностей методики преподавания учебного предмета, возраста, класса, индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся и в соответствии с современными требованиями к уроку (дидактическими, организационными, методическими, санитарно-</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>– актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить;</li><li>– основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте;</li><li>– алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях;</li><li>– методы работы в профессиональной и смежных сферах;</li><li>– структуру плана для решения задач;</li><li>– порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности;</li><li>– психологические основы деятельности коллектива, психологические особенности личности;</li><li>– основы проектной деятельности;</li><li>– требования федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования, примерные основные образовательные программы начального общего образования и примерные адаптированные основные образовательные программы начального общего образования;</li><li>– сущность и виды учебных задач, обобщённых способов</li></ul>

	<p>гигиеническими нормами);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– формулировать различные виды учебных задач и проектировать и решение в соответствии с уровнем познавательного и личностного развития обучающихся;</li> <li>– проектировать процессобучения на основе федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования, примерных образовательных программ;</li> <li>– проектировать программы развития универсальных учебных действий;</li> <li>– проектировать проектно-исследовательскую деятельность в начальной школе;</li> <li>– проектировать процесс обучения с учетом преемственности между уровнями образования;</li> <li>– проектировать процесс обучения с учетом индивидуальных особенностей обучающихся;</li> <li>– проводить педагогический контроль на учебных занятиях;</li> <li>– осуществлять отбор контрольно-измерительных материалов;</li> <li>– применять различные формы и методы диагностики результатов обучения;</li> <li>– оценивать образовательные результаты;</li> <li>– находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся;</li> <li>– систематизировать полученные знания в ходе изучения передового педагогического опыта в организации обучения обучающихся;</li> <li>– применять и оценивать эффективность образовательных технологий, используемых в начальной школе в процессе</li> </ul>	<p>деятельности;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– преемственные образовательные программы дошкольного, начального общего и основного общего образования;</li> <li>– содержание основных учебных предметов начального общего образования в пределах требований федерального государственного образовательного стандарта и основной общеобразовательной программы;</li> <li>– методики преподавания учебных предметов начального общего образования;</li> <li>– основные принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий;</li> <li>– способы достижения планируемых результатов освоения программы начального общего образования;</li> <li>– способы выявления и развития способностей, обучающихся через урочную деятельность, в том числе с использованием возможностей иных образовательных организаций, а также организаций, обладающих ресурсами, необходимыми для реализации программ начального общего образования, и иных видов образовательной деятельности, предусмотренных программой начального общего образования;</li> <li>– специфика обучения детей с особыми образовательными потребностями;</li> <li>– способы организации проектно-исследовательской деятельности обучающихся;</li> <li>– основы контрольно-оценочной деятельности учителя начальных классов;</li> <li>– критерии оценивания и виды учета успеваемости обучающихся;</li> <li>– способы систематизации и оценки педагогического опыта с позиции эффективности его применения в процессе обучения обучающихся;</li> </ul>
--	---	--

	<p>обучения обучающихся;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– анализировать эффективность процесса обучения;</li> <li>– осуществлять самоанализ при организации образовательного процесса;</li> <li>– осуществлять мониторинг и анализ современных психолого-педагогических и методических ресурсов для профессионального роста в области организации обучения обучающихся;</li> <li>– проектировать траекторию профессионального роста;</li> <li>– разрабатывать (осваивать) и применять современные психолого-педагогические технологии, основанные на знании законов развития личности и поведения в реальной и виртуальной среде;</li> <li>– разрабатывать и реализовывать индивидуальные образовательные маршруты, индивидуальные программы развития и индивидуально-ориентированные образовательные программы с учетом личностных и возрастных особенностей обучающихся;</li> <li>– планировать и организовывать учебно-познавательную деятельность обучающихся с особыми потребностями в образовании;</li> <li>– осуществлять педагогическое сопровождение и педагогическую поддержку детей с особыми образовательными потребностями;</li> <li>– осуществлять (совместно с психологом) мониторинг личностных характеристик;</li> <li>– понимать документацию специалистов (психологов, дефектологов, логопедов и т.д.);</li> <li>– осуществлять (совместно с психологом и другими специалистами) психолого-педагогическое сопровождение освоения основных общеобразовательных программ начального общего образования</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– способы анализа и оценки эффективности образовательных технологий в процессе обучения обучающихся;</li> <li>– критерии эффективности применения педагогического опыта и образовательных технологий в обучении обучающихся;</li> <li>– способы анализа и самоанализа профессиональной обучающей деятельности;</li> <li>– способы проектирования траектории профессионального роста;</li> <li>– способы осуществления деятельности в соответствии с выстроенной траекторией профессионального роста;</li> <li>– образовательные запросы общества и государства в области обучения обучающихся;</li> <li>– основы психодидактики, поликультурного образования, закономерности поведения в мире виртуальной реальности и социальных сетях;</li> <li>– специальные подходы к обучению в целях включения в образовательный процесс всех обучающихся, в том числе с особыми потребностями в образовании: обучающихся, проявивших выдающиеся способности; обучающихся, для которых русский язык не является родным; обучающихся с ограниченными возможностями здоровья;</li> <li>– основы построения коррекционно-развивающей работы с детьми, имеющими трудности в обучении;</li> <li>– особенности психических познавательных процессов и учебной деятельности обучающихся с особыми образовательными потребностями</li> </ul>
--	--	---

## 2 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1 Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

<b>Вид учебной работы</b>	<b>Объем часов</b>
<b>Объем образовательной программы учебной дисциплины</b>	69
в том числе:	
– теоретическое обучение	16
– практические занятия	34
– лабораторные занятия	-
– курсовая работа (проект)	-
– самостоятельная работа	19
– консультации	-
– промежуточная аттестация – Дифференцированный зачет	

## 2.1 Тематический план и содержание учебной дисциплины

Наименование разделов и тем	Содержание и формы организации деятельности обучающихся	Объем в часах	Коды компетенций, формированию которых способствует элемент программы
1	2	3	4
<b>Раздел 1. Элементы логики</b>		<b>41</b>	
<b>Тема 1.1 Множества и операции над ними</b>	<b>Содержание</b>	<b>8</b>	ОК 1, ПК 1.1, ПК 1.6, ПК 1.7
	Понятия множества и элемента множества. Характеристическое свойство элементов множества. Отношения между множествами. Подмножество. Равные множества. Пересечение множеств. Объединение множеств. Вычитание множеств. Дополнение подмножества. Декартово произведение множеств. Свойства операций над множествами.	2	
	<b>В том числе практические занятия</b>		
	<b>Практическая работа 1.</b> Упражнения «Отношения между множествами»	2	
	<b>Практическая работа 2.</b> Упражнения «Отношения над множествами»	2	
	<b>Самостоятельная работа:</b> Подготовка сообщений по темам: понятие множества, элементы множества, подмножества, круги Эйлера	2	
<b>Тема 1.2 Математические понятия</b>	<b>Содержание</b>	<b>8</b>	ОК 1, ПК 1.1, ПК 1.6, ПК 1.7
	Математические понятия, объем и содержание понятия. Отношения между понятиями. Тожественные понятия. Определение понятий.	2	
	<b>В том числе практические занятия</b>		
	<b>Практическая работа 3.</b> Объем и содержание понятия. Отношения между понятиями.	2	
	<b>Практическая работа 4.</b> Определение понятий.	2	
	<b>Самостоятельная работа:</b> Решение задач на «распознавание» при формировании математических понятий.	2	
<b>Тема 1.3 Математические предложения</b>	<b>Содержание</b>	<b>15</b>	ОК 1, ПК 1.1, ПК 1.6, ПК 1.7
	Высказывания. Значения истинности высказываний. Высказывательная форма (предикат). Область определения и множество истинности высказывательной формы. Элементарные и составные высказывания.	4	



	Логические связи. Кванторы общности и существования. Отрицание высказываний и высказывательной формы. Отношение логического следования между предложениями. Отношение равносильности между предложениями.		
	<b>В том числе практические занятия</b>		
	<b>Практическая работа 5.</b> Высказывания и высказывательные формы.	2	
	<b>Практическая работа 6.</b> Элементарные высказывания. Логические связи. Составные высказывания.	2	
	<b>Практическая работа 7.</b> Высказывания с кванторами. Значения истинности высказываний, содержащих кванторы.	2	
	<b>Практическая работа 8.</b> Структура теорем. Виды теорем. Закон контрапозиции.	2	
	<b>Самостоятельная работа:</b> Решение заданий по темам «Высказывания, логические операции над высказываниями»; «Высказывательные формы (предикаты), логические операции над предикатами»	3	
<b>Тема 1.4 Математические доказательства</b>	<b>Содержание</b>	<b>10</b>	ОК 1, ОК 4, ПК 1.1, ПК 1.6, ПК 1.7
	Умозаключение. Посылка и заключение. Дедуктивные умозаключения. Неполная индукция. Аналогия. Прямое доказательство. Косвенное доказательство. Полная индукция.	2	
	<b>В том числе практические занятия</b>		
	<b>Практическая работа 9.</b> Умозаключения и их виды.	2	
	<b>Практическая работа 10.</b> Схемы дедуктивных умозаключений.	2	
	<b>Самостоятельная работа:</b> Определение значения истинности высказываний, обучение учащихся способам обоснования истинности высказываний (дедуктивные рассуждения, эксперимент, вычисления, измерения)	4	
<b>Раздел 2. Математическая статистика</b>		<b>20</b>	
<b>Тема 2.1. Методы решения комбинаторных задач как средство обработки и интерпретации информации.</b>	<b>Содержание</b>	<b>10</b>	ОК 1, ПК 1.1, ПК 1.6, ПК 1.7
	Понятие комбинаторной задачи. Элементы и основные формулы комбинаторики.	2	
	<b>В том числе практические занятия</b>		
	<b>Практическая работа 11.</b> Правила суммы и произведения. Размещения и сочетания.	2	
	<b>Практическая работа 12.</b> Вероятность события и её вычисление	2	

	<b>Практическая работа 13.</b> Элементы комбинаторики и теории вероятности.	2	
	<b>Самостоятельная работа:</b> Решение комбинаторных задач, соответствующих специфике профессиональной деятельности.	2	
<b>Тема 2.2. Элементы математической статистики. Статистическое распределение выборки</b>	<b>Содержание</b>	<b>10</b>	ОК 1, ОК 4, ПК 1.1, ПК 1.6, ПК 1.7
	Понятия: случайная величина, значение случайной величины, интервальный ряд, безынтервальный ряд, объем выборки, выборочная средняя, полигон частот, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Первичная обработка опытных данных при изучении случайной величины. Гистограмма как способ представления информации. Методы статистической обработки исследовательских данных.	2	
	<b>В том числе практические занятия</b>		
	<b>Практическая работа 14.</b> Задачи математической статистики. Генеральная и выборочные совокупности. Статистическое распределение выборки. Полигон и гистограмма.	2	
	<b>Практическая работа 15.</b> Выполнение упражнений на первичную статистическую обработку информации и результатов исследований, графическое представление данных.	2	
	<b>Самостоятельная работа:</b> Проверка статистических гипотез. Критерий Пирсона. Проверка гипотезы о виде распределения генеральной совокупности.	4	
<b>Раздел 3. Алгоритмы и их свойства</b>		<b>8</b>	
<b>Тема 3.1. Алгоритмы и их свойства</b>	<b>Содержание</b>	<b>8</b>	ОК 1, ОК 4, ПК 1.1, ПК 1.3, ПК 1.6, ПК 1.7, ПК 1.8
	Понятие алгоритма. Виды алгоритма. Свойства алгоритма.	2	
	<b>В том числе практические занятия</b>		
	<b>Практическая работа 16.</b> Проведение опытно-экспериментальной работы по формированию умения строить простейшие алгоритмы на уроках математики в начальной школе.	4	
	<b>Самостоятельная работа:</b> Решение тренировочных заданий на развитие алгоритмического мышления.	2	
<b>Промежуточная аттестация Дифференцированный зачет</b>			
<b>Всего</b>		<b>69</b>	

### **3 УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

#### **3.1. Материально-техническое обеспечение:**

Для реализации программы учебной дисциплины предусмотрено наличие следующих специальных помещений:

Кабинет математики с методикой преподавания

Основное оборудование: Доска подкатная; Мультимедийный комплект (проектор Casio XJ-V2, экран Lumien Eco Picture); Парты ученическая двойная; Стол преподавателя; Стул.

Программное обеспечение:

1. Microsoft Windows 7 Profession
2. Microsoft Office ProPlus 2010 Russian Acdmc
3. СПС КонсультантЮрист: Версия Проф
4. СПС КонсультантЮрист: Версия Проф .
5. Google Chrome .
6. Adobe Acrobat Reader. 6. Adobe Flash Player.

#### **3.2. Информационное обеспечение реализации программы**

Для реализации программы библиотечный фонд библиотечный фонд ВВГУ укомплектован печатными и электронными изданиями.

Обучающиеся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечены печатными и (или) электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.

#### **Основные издания**

1. Алексеева, О. В. Теоретические основы начального курса математики с методикой преподавания: учебно-методическое пособие для СПО / О. В. Алексеева. — Саратов: Профобразование, 2019. — 123 с. — ISBN 978-5-4488-0322-2. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/86153>

2. Математика для педагогических специальностей: учебник и практикум для среднего профессионального образования / Н. Л. Стефанова, В. И. Снегурова, Н. В. Кочуренко, О. В. Харитоновна; под общей редакцией Н. Л. Стефановой. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 218 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05028-8. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/490885>.

3. Теоретические основы начального курса математики с методикой преподавания. Решение текстовых задач: учебно-методическое пособие для СПО / составители О. В. Алексеева, И. Н. Ищенко. — Саратов: Профобразование, 2019. — 164 с. — ISBN 978-5-4488-0317-8. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/86152>

#### **Дополнительная литература:**

1. Фрейлах, Н. И. Математика для воспитателей : учебник / Н.И. Фрейлах. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. — 136 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0767-2. - Текст: электронный. - URL:

<https://znanium.com/catalog/product/1232306> (дата обращения: 08.07.2022). – Режим доступа: по подписке.

2. Далингер, В. А. Методика обучения математике в начальной школе : учебное пособие для вузов / В. А. Далингер, Л. П. Борисова. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 187 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07529-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/512938>

3. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Традиционные сюжетно-текстовые задачи : учебное пособие для вузов / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 174 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09591-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/514872>

### **Перечень информационных технологий и программного обеспечения**

В учебном процессе по дисциплине используются следующие информационно-справочные системы, а также программное обеспечение и электронные библиотечные системы:

1. Поисковые системы: Google, Mail.ru, Bing, Yandex;
2. Программное обеспечение: Операционная система Windows;
3. Пакет прикладных программ Microsoft Office: Microsoft Word, Microsoft Excel, Microsoft Power Point.
4. Электронные библиотечные системы:  
Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU – режим доступа URL: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>  
Электронно-библиотечная система Znanium.com – режим доступа URL: <http://www.znanium.com>  
Электронно-библиотечная система ЮРАЙТ Образовательная платформа – режим доступа URL: <https://urait.ru/>

## **4 КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

<b><i>Результаты обучения</i></b>	<b><i>Критерии оценки</i></b>	<b><i>Методы оценки</i></b>
<i>Перечень умений, осваиваемых в рамках дисциплины:</i>		
распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; определять этапы решения задачи; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составлять план действия; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план	- умение применять более одного способа решения профессиональной задачи; - умение аргументировать выбор конкретного способа.	Оценка ответов в устной/письменной форме; Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы; Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового умения каждым обучающимся; Дифференцированный зачет.

<p>организовывать работу коллектива и команды; взаимодействовать с коллегами в ходе профессиональной деятельности</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- демонстрация результатов деятельности в условиях коллективной и командной работы в соответствии с заданной задачей;</li> <li>- объективность оценки собственного вклада в достижение командного результата;</li> <li>- успешность применения коммуникационных способностей на практике;</li> <li>- соблюдение принципов профессиональной этики;</li> <li>- владение способами бесконфликтного общения и саморегуляции в коллективе.</li> </ul>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме;          Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы;          Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового умения каждым обучающимся;          Дифференцированный зачет.</p>
<p>определять цели и задачи урока, планировать его с учетом особенностей методики преподавания учебного предмета, возраста, класса, индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся и в соответствии с современными требованиями к уроку (дидактическими, организационными, методическими, санитарно-гигиеническими нормами); формулировать различные виды учебных задач и проектировать и решение в соответствии с уровнем познавательного и личностного развития обучающихся; проектировать процессобучения на основе ФГОС НОО, примерных образовательных программ; проектировать программы развития универсальных учебных действий; проектировать проектно-исследовательскую деятельность в начальной школе; проектировать процесс обучения с учетом преемственности между уровнями образования; проектировать процесс обучения с учетом индивидуальных особенностей обучающихся</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- глубина осознанности сущности и требований ФГОС;</li> <li>- полнота и глубина понимания сути разработки и оформления ООП НОО;</li> <li>- грамотность проектирования образовательного процесса в начальных классах в соответствии с требованиями ФГОС и примерных основных образовательных программ НОО;</li> <li>- соответствие выбранных форм работы индивидуально-возрастным особенностям обучающихся;</li> <li>- точность соблюдения педагогических, гигиенических, специальных требований при проектировании образовательного процесса.</li> </ul>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме;          Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы;          Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового умения каждым обучающимся;          Дифференцированный зачет.</p>
<p>проводить педагогический контроль на учебных занятиях;</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- обоснованность выбора видов и форм</li> </ul>	<p>Оценка ответов в устной/письменной</p>

<p>осуществлять отбор контрольно-измерительных материалов; применять различные формы и методы диагностики результатов обучения; оценивать образовательные результаты</p>	<p>контроля и методов диагностики результатов обучения;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- оптимальность подбора форм и средств оценивания результатов обучения обучающихся;</li> <li>- обоснованность отбора контрольно-измерительных материалов для оценки результата обучения обучающихся;</li> <li>- точность интерпретации результатов диагностики учебных достижений обучающихся;</li> <li>- компетентность и объективность педагогического контроля и оценки результатов обучения;</li> <li>- обоснованность подбора методов и средств корректировки процесса обучения на основе анализа результатов обучения.</li> </ul>	<p>форме; Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы; Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового умения каждым обучающимся; Дифференцированный зачет.</p>
<p>находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся; систематизировать полученные знания в ходе изучения передового педагогического опыта в организации обучения обучающихся; применять и оценивать эффективность образовательных технологий, используемых в начальной школе в процессе обучения обучающихся</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- аргументированность и полнота анализа педагогического опыта и образовательных технологий в области начального общего образования на основе изучения профессиональной литературы, анализа деятельности других педагогов;</li> <li>- полнота самоанализа педагогического опыта и использования современных образовательных технологий в образовательном процессе;</li> <li>- ясность и аргументированность изложения собственного мнения в ходе оценки педагогического опыта;</li> <li>- соблюдение этических норм при анализе</li> </ul>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме; Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы; Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового умения каждым обучающимся; Дифференцированный зачет.</p>

	<p>педагогического опыта и оценке эффективности применения образовательных технологий в учебном процессе;</p> <p>- полнота демонстрации способов обобщения, представления и распространения педагогического опыта.</p>	
<p>выстраивать траекторию профессионального роста на основе результатов анализа процесса обучения и самоанализа деятельности.</p>	<p>- глубина самоанализа результатов профессиональной деятельности;</p> <p>- точность и аргументированность оценки процесса обучения;</p> <p>- обоснованность целей профессионального роста и развития;</p> <p>- целесообразность выбранных форм и методов профессионально-личностного развития;</p> <p>- эффективность реализации плана профессионального роста и развития.</p>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме;</p> <p>Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы;</p> <p>Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового умения каждым обучающимся;</p> <p>Дифференцированный зачет.</p>
<p>использовать и апробировать специальные подходы к обучению в целях включения в образовательный процесс всех обучающихся, в том числе с особыми потребностями в образовании: обучающихся, проявивших выдающиеся способности; обучающихся, для которых русский язык не является родным; обучающихся с ограниченными возможностями здоровья.</p>	<p>- целесообразность подбора специальных методов и форм организации учебной деятельности всех обучающихся, в том числе обучающихся с особыми потребностями в образовании;</p> <p>- соответствие материально-технического обеспечения образовательного процесса особенностям всех обучающихся, в том числе обучающихся с особыми потребностями в образовании;</p> <p>- целесообразность отбора оценочных средств для проверки результатов освоения учебных предметов</p>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме;</p> <p>Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы;</p> <p>Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового умения каждым обучающимся;</p> <p>Дифференцированный зачет.</p>

	<p>обучающимися с особыми потребностями в образовании;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- обоснованность использования специальных подходов к обучению;</li> <li>- полнота и эффективность включения в образовательный процесс всех обучающихся, в том числе с особыми потребностями в образовании.</li> </ul>	
<i>Перечень знаний, осваиваемых в рамках дисциплины:</i>		
<p>актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить; основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методы работы в профессиональной и смежных сферах; структуру плана для решения задач; порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- знание более одного способа решения профессиональной задачи.</li> <li>- аргументация выбора конкретного способа</li> </ul>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме;</p> <p>Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы;</p> <p>Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового знания каждым обучающимся;</p> <p>Дифференцированный зачет.</p>
<p>психологические основы деятельности коллектива, психологические особенности личности; основы проектной деятельности</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- демонстрация результатов деятельности в условиях коллективной и командной работы в соответствии с заданной задачей;</li> <li>- объективность оценки собственного вклада в достижение командного результата;</li> <li>- успешность применения коммуникационных способностей на практике;</li> <li>- соблюдение принципов профессиональной этики;</li> <li>- владение способами бесконфликтного общения и саморегуляции в коллективе.</li> </ul>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме;</p> <p>Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы;</p> <p>Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового знания каждым обучающимся;</p> <p>Дифференцированный зачет.</p>
<p>требования федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования,</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- знание и учет федеральных государственных образовательных</li> </ul>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме;</p> <p>Экспертное</p>



<p>примерные основные образовательные программы начального общего образования и примерных адаптированных основных образовательных программ начального общего образования;</p> <p>сущность и виды учебных задач, обобщённых способов деятельности;</p> <p>преемственные образовательные программы дошкольного, начального общего и основного общего образования;</p> <p>содержание основных учебных предметов начального общего образования в пределах требований федерального государственного образовательного стандарта и основной общеобразовательной программы;</p> <p>методики преподавания учебных предметов начального общего образования;</p> <p>основные принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий;</p> <p>способы достижения планируемых результатов освоения программы начального общего образования;</p> <p>способы выявления и развития способностей, обучающихся через урочную деятельность, в том числе с использованием возможностей иных образовательных организаций, а также организаций, обладающих ресурсами, необходимыми для реализации программ начального общего образования, и иных видов образовательной деятельности, предусмотренных программой начального общего образования;</p> <p>специфика обучения детей с особыми образовательными потребностями;</p> <p>способы организации проектно-исследовательской деятельности обучающихся</p>	<p>стандартов, примерных основных образовательных программ начального общего образования при проектировании процесса обучения</p>	<p>наблюдение за ходом выполнения практической работы;</p> <p>Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового знания каждым обучающимся;</p> <p>Дифференцированный зачет.</p>
<p>основы контрольно-оценочной деятельности учителя начальных</p>	<p>- адекватность и объективность выбранного</p>	<p>Оценка ответов в устной/письменной</p>

<p>классов; критерии оценивания и виды учета успеваемости обучающихся</p>	<p>способа контроля, коррекции и оценки результата обучения обучающихся</p>	<p>форме; Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы; Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового знания каждым обучающимся; Дифференцированный зачет.</p>
<p>способы систематизации и оценки педагогического опыта с позиции эффективности его применения в процессе обучения обучающихся; способы анализа и оценки эффективности образовательных технологий в процессе обучения обучающихся; критерии эффективности применения педагогического опыта и образовательных технологий в обучении обучающихся</p>	<p>- объективность оценки педагогического опыта и образовательных технологий в области начального общего образования с позиции эффективности их применения в процессе обучения</p>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме; Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы; Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового знания каждым обучающимся; Дифференцированный зачет.</p>
<p>ПК 1.7 способы анализа и самоанализа профессиональной обучающей деятельности; способы проектирования траектории профессионального роста; способы осуществления деятельности в соответствии с выстроенной траекторией профессионального роста; образовательные запросы общества и государства в области обучения обучающихся</p>	<p>- траектория профессионального роста выстроена на основе результатов анализа процесса обучения и самоанализа деятельности.</p>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме; Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы; Мониторинг роста уровня самостоятельности и навыков получения нового знания каждым обучающимся; Дифференцированный зачет.</p>
<p>ПК 1.8 основы психодидактики, поликультурного образования, закономерности поведения в мире виртуальной реальности и социальных сетях; специальные подходы к обучению в целях включения в образовательный процесс всех обучающихся, в том числе с</p>	<p>- использованы специальные подходы к обучению в целях включения в образовательный процесс всех обучающихся, в том числе с особыми потребностями в образовании:</p>	<p>Оценка ответов в устной/письменной форме; Экспертное наблюдение за ходом выполнения практической работы; Мониторинг роста уровня</p>

<p>особыми потребностями в образовании: обучающихся, проявивших выдающиеся способности; обучающихся, для которых русский язык не является родным; обучающихся с ограниченными возможностями здоровья;</p> <p>основы построения коррекционно-развивающей работы с детьми, имеющими трудности в обучении; особенности психических познавательных процессов и учебной деятельности обучающихся с особыми образовательными потребностями</p>	<p>обучающихся, проявивших выдающиеся способности;</p> <p>обучающихся, для которых русский язык не является родным;</p> <p>обучающихся с ограниченными возможностями здоровья.</p>	<p>самостоятельности и навыков получения нового знания каждым обучающимся;</p> <p>Дифференцированный зачет.</p>
--	--	---

Для оценки достижения запланированных результатов обучения по дисциплине разработаны контрольно-оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, которые прилагаются к рабочей программе дисциплины.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации  
по учебной дисциплине

*ОП.08 Математика в профессиональной деятельности*  
программы подготовки специалистов среднего звена  
*44.02.02 «Преподавание в начальных классах»*

Форма обучения: *очно*

Владивосток 2023

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по учебной дисциплине *ОП.08 Математика в профессиональной деятельности* разработаны в соответствии с требованиями ФГОС СПО по специальности 44.02.02 «Преподавание в начальных классах», утвержденного приказом Минобрнауки России от 17.08.2022, №742, примерной образовательной программой, рабочей программой учебной дисциплины.

Разработчик(и):

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии

Протокол № 9 от «16» мая 2023 г.

Председатель ЦМК  А.Д. Гусакова  
*подпись*

## 1 Общие сведения

Фонд оценочных средства (далее – ФОС) предназначен для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины *ОП.08 Математика в профессиональной деятельности*

ФОС включает в себя контрольные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине, которая проводится в форме дифференцированного зачёта (с использованием оценочного средства – *письменного опроса.*)

## 2 Планируемые результаты обучения по дисциплине, обеспечивающие результаты освоения образовательной программы

Код ОК, ПК <sup>1</sup>	Код результата обучения <sup>1</sup>	Наименование результата обучения <sup>1</sup>
ОК 1	31	актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить
	32	основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте
	33	алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях
	34	методы работы в профессиональной и смежных сферах
	35	структуру плана для решения задач
	36	порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности
ОК 4	37	психологические основы деятельности коллектива, психологические особенности личности
	38	основы проектной деятельности
ПК 1.1	39	требования федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования, примерные основные образовательные программы начального общего образования и примерные адаптированные основные образовательные программы начального общего образования
	310	сущность и виды учебных задач, обобщённых способов деятельности
	311	преемственные образовательные программы дошкольного, начального общего и основного общего образования
	312	содержание основных учебных предметов начального общего образования в пределах требований федерального государственного образовательного стандарта и основной общеобразовательной программы
	313	методики преподавания учебных предметов начального общего образования
	314	основные принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий
	315	способы достижения планируемых результатов освоения программы начального общего образования
	316	способы выявления и развития способностей, обучающихся через урочную деятельность, в том числе с использованием возможностей иных образовательных организаций, а также организаций, обладающих ресурсами, необходимыми для реализации программ начального общего образования, и иных видов образовательной деятельности, предусмотренных

Код ОК, ПК <sup>1</sup>	Код результата обучения <sup>1</sup>	Наименование результата обучения <sup>1</sup>
		программой начального общего образования
	317	специфика обучения детей с особыми образовательными потребностями
	318	способы организации проектно-исследовательской деятельности обучающихся
ПК 1.3	319	основы контрольно-оценочной деятельности учителя начальных классов
	320	критерии оценивания и виды учета успеваемости обучающихся
ПК 1.6	321	способы систематизации и оценки педагогического опыта с позиции эффективности его применения в процессе обучения обучающихся
	322	способы анализа и оценки эффективности образовательных технологий в процессе обучения обучающихся
	323	критерии эффективности применения педагогического опыта и образовательных технологий в обучении обучающихся
ПК 1.7	324	способы анализа и самоанализа профессиональной обучающей деятельности
	325	способы проектирования траектории профессионального роста
	326	способы осуществления деятельности в соответствии с выстроенной траекторией профессионального роста
	327	образовательные запросы общества и государства в области обучения обучающихся
ПК 1.8	328	основы психодидактики, поликультурного образования, закономерности поведения в мире виртуальной реальности и социальных сетях
	329	специальные подходы к обучению в целях включения в образовательный процесс всех обучающихся, в том числе с особыми потребностями в образовании: обучающихся, проявивших выдающиеся способности; обучающихся, для которых русский язык не является родным; обучающихся с ограниченными возможностями здоровья
	330	основы построения коррекционно-развивающей работы с детьми, имеющими трудности в обучении
	331	особенности психических познавательных процессов и учебной деятельности обучающихся с особыми образовательными потребностями
ОК 1	У1	распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части
	У2	определять этапы решения задачи
	У3	выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы
	У4	владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах
	У5	реализовывать составленный план
	У6	оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)
ОК 4	У7	организовывать работу коллектива и команды

Код ОК, ПК <sup>1</sup>	Код результата обучения <sup>1</sup>	Наименование результата обучения <sup>1</sup>
	У8	взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности
ПК 1.1	У9	определять цели и задачи урока, планировать его с учетом особенностей методики преподавания учебного предмета, возраста, класса, индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся и в соответствии с современными требованиями к уроку (дидактическими, организационными, методическими, санитарно-гигиеническими нормами)
	У10	формулировать различные виды учебных задач и проектировать их решение в соответствии с уровнем познавательного и личностного развития обучающихся
	У11	проектировать процесс обучения на основе федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования, примерных образовательных программ
	У12	проектировать программы развития универсальных учебных действий
	У13	проектировать проектно-исследовательскую деятельность в начальной школе
	У14	проектировать процесс обучения с учетом преемственности между уровнями образования
	У15	проектировать процесс обучения с учетом индивидуальных особенностей обучающихся
	ПК 1.3	У16
У17		осуществлять отбор контрольно-измерительных материалов
У18		применять различные формы и методы диагностики результатов обучения
У19		оценивать образовательные результаты
ПК 1.6	У20	находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся
	У21	систематизировать полученные знания в ходе изучения передового педагогического опыта в организации обучения обучающихся
	У22	применять и оценивать эффективность образовательных технологий, используемых в начальной школе в процессе обучения обучающихся
ПК 1.7	У23	анализировать эффективность процесса обучения
	У24	осуществлять самоанализ при организации образовательного процесса
	У25	осуществлять мониторинг и анализ современных психолого-педагогических и методических ресурсов для профессионального роста в области организации обучения обучающихся
	У26	проектировать траекторию профессионального роста
ПК 1.8	У27	разрабатывать (осваивать) и применять современные психолого-педагогические технологии, основанные на знании законов развития личности и поведения в реальной и виртуальной среде
	У28	разрабатывать и реализовывать индивидуальные образовательные маршруты, индивидуальные программы



Код ОК, ПК <sup>1</sup>	Код результата обучения <sup>1</sup>	Наименование результата обучения <sup>1</sup>
		развития и индивидуально-ориентированные образовательные программы с учетом личностных и возрастных особенностей обучающихся
	У29	планировать и организовывать учебно-познавательную деятельность обучающихся с особыми потребностями в образовании
	У30	осуществлять педагогическое сопровождение и педагогическую поддержку детей с особыми образовательными потребностями
	У31	осуществлять (совместно с психологом) мониторинг личностных характеристик
	У32	понимать документацию специалистов (психологов, дефектологов, логопедов и т.д.)
	У33	осуществлять (совместно с психологом и другими специалистами) психолого-педагогическое сопровождение освоения основных общеобразовательных программ начального общего образования

### 3 Соответствие оценочных средств контролируемым результатам обучения

#### 3.1 Средства, применяемые для оценки уровня теоретической подготовки

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
<b>Раздел 1. Элементы логики</b>				
<b>Тема 1.1 Множества и операции над ними</b>	31	Понимание актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях;</i>	<i>Письменный опрос. Вопросы 1-11 (п.5.1)</i>
	32	Способность использовать основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте	<i>оценка деятельности студента на практических занятиях: 1, 2 (п.5.2);</i>	
	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях	<i>оценка выполнения заданий для самостоятельной работы (п.5.3).</i>	
	39	Знание требований федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования, примерных основных образовательных программ начального общего образования и		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		примерных адаптированных основных образовательных программ начального общего образования		
	310	Представление о сущности и видах учебных задач, обобщённых способов деятельности		
	321	Представление о способах систематизации и оценки педагогического опыта с позиции эффективности его применения в процессе обучения обучающихся		
	322	Представление о способах анализа и оценки эффективности образовательных технологий в процессе обучения обучающихся		
	324	Представление о способах анализа и самоанализа профессиональной обучающей деятельности		
	У1	Способность распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части		
	У2	Способность определять этапы решения задачи		
	У4	Умение пользоваться актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах		
	У6	Умение оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У9	Способность определять цели и задачи урока, планировать его с учетом особенностей методики преподавания учебного предмета, возраста, класса, индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся и в соответствии с современными		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		требованиями к уроку (дидактическими, организационными, методическими, санитарно-гигиеническими нормами)		
	У10	Способность формулировать различные виды учебных задач и проектировать и решение в соответствии с уровнем познавательного и личностного развития обучающихся		
	У20	Умение находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся		
	У21	Умение систематизировать полученные знания в ходе изучения передового педагогического опыта в организации обучения обучающихся		
	У23	Умение анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Тема 1.2 Математические понятия</b>	31	Понимание актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях;</i>	<i>Письменный опрос. Вопросы 12-19 (п.5.1)</i>
	32	Способность использовать основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте	<i>оценка деятельности студента на практических занятиях: 3, 4 (п.5.2);</i>	
	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях	<i>оценка выполнения заданий для самостоятельной работы (п.5.3)</i>	
	39	Знание требований федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования, примерных основных образовательных программ		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		начального общего образования и примерных адаптированных основных образовательных программ начального общего образования		
	310	Представление о сущности и видах учебных задач, обобщённых способов деятельности		
	321	Представление о способах систематизации и оценки педагогического опыта с позиции эффективности его применения в процессе обучения обучающихся		
	322	Представление о способах анализа и оценки эффективности образовательных технологий в процессе обучения обучающихся		
	324	Представление о способах анализа и самоанализа профессиональной обучающей деятельности		
	У1	Способность распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части		
	У2	Способность определять этапы решения задачи		
	У4	Умение пользоваться актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах		
	У6	Умение оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У9	Способность определять цели и задачи урока, планировать его с учетом особенностей методики преподавания учебного предмета, возраста, класса, индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся и в		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		соответствии с современными требованиями к уроку (дидактическими, организационными, методическими, санитарно-гигиеническими нормами)		
	У10	Способность формулировать различные виды учебных задач и проектировать и решение в соответствии с уровнем познавательного и личностного развития обучающихся		
	У20	Умение находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся		
	У21	Умение систематизировать полученные знания в ходе изучения передового педагогического опыта в организации обучения обучающихся		
	У23	Умение анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Тема 1.3 Математические предложения</b>	31	Понимание актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях;</i> <i>оценка деятельности студента на практических занятиях:</i> 5, 6, 7, 8 (п.5.2); <i>оценка выполнения заданий для</i>	<i>Письменный опрос. Вопросы 20-31 (п.5.1)</i>
	32	Способность использовать основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте		
	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях		
	39	Знание требований федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования, примерных основных		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		образовательных программ начального общего образования и примерных адаптированных основных образовательных программ начального общего образования	<i>самостоятельной работы (п.5.3).</i>	
	310	Представление о сущности и видах учебных задач, обобщённых способов деятельности		
	321	Представление о способах систематизации и оценки педагогического опыта с позиции эффективности его применения в процессе обучения обучающихся		
	322	Представление о способах анализа и оценки эффективности образовательных технологий в процессе обучения обучающихся		
	324	Представление о способах анализа и самоанализа профессиональной обучающей деятельности		
	У1	Способность распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части		
	У2	Способность определять этапы решения задачи		
	У4	Умение пользоваться актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах		
	У6	Умение оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У9	Способность определять цели и задачи урока, планировать его с учетом особенностей методики преподавания учебного предмета, возраста, класса, индивидуальных и возрастных		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		особенностей обучающихся и в соответствии с современными требованиями к уроку (дидактическими, организационными, методическими, санитарно-гигиеническими нормами)		
	У10	Способность формулировать различные виды учебных задач и проектировать и решение в соответствии с уровнем познавательного и личностного развития обучающихся		
	У20	Умение находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся		
	У21	Умение систематизировать полученные знания в ходе изучения передового педагогического опыта в организации обучения обучающихся		
	У23	Умение анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Тема 1.4 Математические доказательства</b>	34	Понимание актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях;</i>  <i>оценка деятельности студента на практических занятиях:</i> <i>9, 10 (п.5.2);</i>  <i>оценка выполнения заданий для самостоятел</i>	<i>Письменный опрос. Вопросы 32-38 (п.5.1)</i>
	35	Способность использовать основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте		
	36	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях		
	39	Знание требований федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования,		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		примерных основных образовательных программ начального общего образования и примерных адаптированных основных образовательных программ начального общего образования	<i>ьной работы (п.5.3).</i>	
	310	Представление о сущности и видах учебных задач, обобщённых способов деятельности		
	314	Знакомство с основными принципами деятельностного подхода, видами и приемами современных педагогических технологий		
	321	Представление о способах систематизации и оценки педагогического опыта с позиции эффективности его применения в процессе обучения обучающихся		
	322	Представление о способах анализа и оценки эффективности образовательных технологий в процессе обучения обучающихся		
	324	Представление о способах анализа и самоанализа профессиональной обучающей деятельности		
	У1	Способность распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части		
	У2	Способность определять этапы решения задачи		
	У4	Умение пользоваться актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах		
	У6	Умение оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		



Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
	У8	взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности		
	У9	Способность определять цели и задачи урока, планировать его с учетом особенностей методики преподавания учебного предмета, возраста, класса, индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся и в соответствии с современными требованиями к уроку (дидактическими, организационными, методическими, санитарно-гигиеническими нормами)		
	У10	Способность формулировать различные виды учебных задач и проектировать и решение в соответствии с уровнем познавательного и личностного развития обучающихся		
	У20	Умение находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся		
	У21	Умение систематизировать полученные знания в ходе изучения передового педагогического опыта в организации обучения обучающихся		
	У23	Умение анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Раздел 2. Математическая статистика</b>				
<b>Тема 2.1 Методы решения комбинаторных задач как средство</b>	31	Понимание актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях; оценка</i>	<i>Письменный опрос. Вопросы 39-50 (п.5.1)</i>
	32	Способность использовать основные источники информации и ресурсы для решения задач и		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
<b>обработки и интерпретации информации</b>		проблем в профессиональном и/или социальном контексте	<i>деятельности студента на практических занятиях: 11, 12, 13 (п.5.2);</i>  <i>оценка выполнения заданий для самостоятельной работы (п.5.3).</i>	
	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях		
	39	Знание требований федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования, примерных основных образовательных программ начального общего образования и примерных адаптированных основных образовательных программ начального общего образования		
	310	Представление о сущности и видах учебных задач, обобщённых способов деятельности		
	314	Знакомство с основными принципами деятельностного подхода, видами и приемами современных педагогических технологий		
	321	Представление о способах систематизации и оценки педагогического опыта с позиции эффективности его применения в процессе обучения обучающихся		
	322	Представление о способах анализа и оценки эффективности образовательных технологий в процессе обучения обучающихся		
	324	Представление о способах анализа и самоанализа профессиональной обучающей деятельности		
	У1	Способность распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
	У2	Способность определять этапы решения задачи		
	У4	Умение пользоваться актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах		
	У6	Умение оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У9	Способность определять цели и задачи урока, планировать его с учетом особенностей методики преподавания учебного предмета, возраста, класса, индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся и в соответствии с современными требованиями к уроку (дидактическими, организационными, методическими, санитарно-гигиеническими нормами)		
	У10	Способность формулировать различные виды учебных задач и проектировать и решение в соответствии с уровнем познавательного и личностного развития обучающихся		
	У20	Умение находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся		
	У21	Умение систематизировать полученные знания в ходе изучения передового педагогического опыта в организации обучения обучающихся		
	У23	Умение анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Тема 2.2. Элементы</b>	31	Понимание актуального профессионального и	<i>оценка</i>	<i>Письменный опрос.</i>

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
<b>математической статистики. Статистическое распределение выборки</b>		социального контекста, в котором приходится работать и жить	<i>активности студента на аудиторных занятиях;</i>  <i>оценка деятельности студента на практических занятиях:</i> <i>14, 15 (п.5.2);</i>  <i>оценка выполнения заданий для самостоятельной работы (п.5.3).</i>	<i>Вопросы 51-88 (п.5.1)</i>
	32	Способность использовать основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте		
	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях		
	39	Знание требований федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования, примерных основных образовательных программ начального общего образования и примерных адаптированных основных образовательных программ начального общего образования		
	310	Представление о сущности и видах учебных задач, обобщённых способов деятельности		
	314	Знакомство с основными принципами деятельностного подхода, видами и приемами современных педагогических технологий		
	321	Представление о способах систематизации и оценки педагогического опыта с позиции эффективности его применения в процессе обучения обучающихся		
	322	Представление о способах анализа и оценки эффективности образовательных технологий в процессе обучения обучающихся		
	324	Представление о способах анализа и самоанализа профессиональной обучающей деятельности		
	У1	Способность распознавать задачу		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части		
	У2	Способность определять этапы решения задачи		
	У4	Умение пользоваться актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах		
	У6	Умение оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У8	взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности		
	У9	Способность определять цели и задачи урока, планировать его с учетом особенностей методики преподавания учебного предмета, возраста, класса, индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся и в соответствии с современными требованиями к уроку (дидактическими, организационными, методическими, санитарно-гигиеническими нормами)		
	У10	Способность формулировать различные виды учебных задач и проектировать и решение в соответствии с уровнем познавательного и личностного развития обучающихся		
	У20	Умение находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся		
	У21	Умение систематизировать полученные знания в ходе		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		изучения передового педагогического опыта в организации обучения обучающихся		
	У23	Умение анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Раздел 3. Алгоритмы и их свойства</b>				
<b>Тема 3.1 Алгоритмы и их свойства</b>	31	Понимание актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях;</i>  <i>оценка деятельности студента на практических занятиях: 16 (п.5.2);</i>  <i>оценка выполнения заданий для самостоятельной работы (п.5.3).</i>	<i>Письменный опрос. Вопросы 89-92 (п.5.1)</i>
	32	Способность использовать основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте		
	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях		
	39	Знание требований федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования, примерных основных образовательных программ начального общего образования и примерных адаптированных основных образовательных программ начального общего образования		
	310	Представление о сущности и видах учебных задач, обобщённых способов деятельности		
	314	Знакомство с основными принципами деятельностного подхода, видами и приемами современных педагогических технологий		
	321	Представление о способах систематизации и оценки педагогического опыта с позиции эффективности его применения в		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		процессе обучения обучающихся		
	322	Представление о способах анализа и оценки эффективности образовательных технологий в процессе обучения обучающихся		
	324	Представление о способах анализа и самоанализа профессиональной обучающей деятельности		
	У1	Способность распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части		
	У2	Способность определять этапы решения задачи		
	У4	Умение пользоваться актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах		
	У6	Умение оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У8	взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности		
	У9	Способность определять цели и задачи урока, планировать его с учетом особенностей методики преподавания учебного предмета, возраста, класса, индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся и в соответствии с современными требованиями к уроку (дидактическими, организационными, методическими, санитарно-гигиеническими нормами)		
	У10	Способность формулировать различные виды учебных задач и проектировать и решение в соответствии с уровнем		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		познавательного и личностного развития обучающихся		
	У20	Умение находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся		
	У21	Умение систематизировать полученные знания в ходе изучения передового педагогического опыта в организации обучения обучающихся		
	У23	Умение анализировать эффективность процесса обучения		

### 3.2 Средства, применяемые для оценки уровня практической подготовки

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
<b>Раздел 1. Элементы логики</b>				
<b>Тема 1.1 Множества и операции над ними</b>	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях;</i>	<i>Письменный опрос. Вопросы 1-11 (п.5.1)</i>
	35	Знание структуры плана для решения задач		
	314	Представление об основных принципах деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий	<i>оценка деятельности студента на практических занятиях: 1, 2 (п.5.2);</i>	
	326	Знание способов осуществления деятельности в соответствии с выстроенной траекторией профессионального роста		
	У1	Умение распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или	<i>оценка выполнения заданий для самостоятел</i>	



Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		проблему и выделять её составные части	<i>ьной работы (п.5.3).</i>	
	У2	Умение определять этапы решения задачи		
	У3	Умение выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы		
	У5	Способность реализовывать составленный план		
	У6	Способность оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У23	Способность анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Тема 1.2 Математические понятия</b>	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях;</i>  <i>оценка деятельность и студента на практических занятиях: 3, 4 (п.5.2);</i>  <i>оценка выполнения заданий для самостоятельной работы (п.5.3)</i>	<i>Письменный опрос. Вопросы 12-19 (п.5.1)</i>
	35	Знание структуры плана для решения задач		
	314	Представление об основных принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий		
	326	Знание способов осуществления деятельности в соответствии с выстроенной траекторией профессионального роста		
	У1	Умение распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части		
	У2	Умение определять этапы решения задачи		
	У3	Умение выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы		
	У5	Способность реализовывать		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		составленный план		
	У6	Способность оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У23	Способность анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Тема 1.3 Математические предложения</b>	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях;</i>  <i>оценка деятельности и студента на практических занятиях:</i> 5, 6, 7, 8 (п.5.2);  <i>оценка выполнения заданий для самостоятельной работы</i> (п.5.3).	<i>Письменный опрос. Вопросы 20-31 (п.5.1)</i>
	35	Знание структуры плана для решения задач		
	314	Представление об основных принципах деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий		
	326	Знание способов осуществления деятельности в соответствии с выстроенной траекторией профессионального роста		
	У1	Умение распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части		
	У2	Умение определять этапы решения задачи		
	У3	Умение выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы		
	У5	Способность реализовывать составленный план		
	У6	Способность оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У23	Способность анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Тема 1.4</b>	33	Представление об алгоритмах	<i>оценка</i>	<i>Письменный</i>

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
<b>Математические доказательства</b>		выполнения работ в профессиональной и смежных областях	<i>активности студента на аудиторных занятиях;</i>  <i>оценка деятельность и студента на практических занятиях:</i> <i>9, 10 (п.5.2);</i>  <i>оценка выполнения заданий для самостоятельной работы (п.5.3).</i>	<i>опрос.</i> <i>Вопросы 32-38 (п.5.1)</i>
	35	Знание структуры плана для решения задач		
	314	Представление об основных принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий		
	326	Знание способов осуществления деятельности в соответствии с выстроенной траекторией профессионального роста		
	У1	Умение распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части		
	У2	Умение определять этапы решения задачи		
	У3	Умение выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы		
	У5	Способность реализовывать составленный план		
	У6	Способность оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У8	Умение взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности		
	У23	Способность анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Раздел 2. Математическая статистика</b>				
<b>Тема 2.1 Методы решения комбинатор</b>	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях	<i>оценка активности студента на аудиторных</i>	<i>Письменный опрос.</i> <i>Вопросы 39-50 (п.5.1)</i>
	35	Знание структуры плана для		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
<b>ных задач как средство обработки и интерпретации информации</b>		решения задач	занятиях;	
	314	Представление об основных принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий	<i>оценка деятельность и студента на</i>	
	326	Знание способов осуществления деятельности в соответствии с выстроенной траекторией профессионального роста	<i>практических занятиях: 11, 12, 13 (п.5.2);</i>	
	У1	Умение распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части	<i>оценка выполнения заданий для самостоятельной работы (п.5.3).</i>	
	У2	Умение определять этапы решения задачи		
	У3	Умение выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы		
	У5	Способность реализовывать составленный план		
	У6	Способность оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У23	Способность анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Тема 2.2. Элементы математической статистики. Статистическое распределение выборки</b>	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях;</i>	<i>Письменный опрос. Вопросы 51-88 (п.5.1)</i>
	35	Знание структуры плана для решения задач		
	314	Представление об основных принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий	<i>оценка деятельность и студента на</i>	
	326	Знание способов осуществления деятельности в соответствии с выстроенной траекторией	<i>практических занятиях:</i>	

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		профессионального роста	<i>14, 15 (п.5.2);</i>	
	У1	Умение распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части	<i>оценка выполнения заданий для самостоятельной работы (п.5.3).</i>	
	У2	Умение определять этапы решения задачи		
	У3	Умение выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы		
	У5	Способность реализовывать составленный план		
	У6	Способность оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У8	Умение взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности		
	У23	Способность анализировать эффективность процесса обучения		
<b>Раздел 3. Алгоритмы и их свойства</b>				
<b>Тема 3.1 Алгоритмы и их свойства</b>	33	Представление об алгоритмах выполнения работ в профессиональной и смежных областях	<i>оценка активности студента на аудиторных занятиях;</i>	<i>Письменный опрос. Вопросы 89-92 (п.5.1)</i>
	35	Знание структуры плана для решения задач		
	314	Представление об основных принципах деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий	<i>оценка деятельности и студента на</i>	
	326	Знание способов осуществления деятельности в соответствии с выстроенной траекторией профессионального роста	<i>практических занятиях: 16 (п.5.2);</i>	
	У1	Умение распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или	<i>оценка выполнения</i>	

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части	<i>заданий для самостоятельной работы (п.5.3).</i>	
	У2	Умение определять этапы решения задачи		
	У3	Умение выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы		
	У5	Способность реализовывать составленный план		
	У6	Способность оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)		
	У8	Умение взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности		
	У18	Умение применять различные формы и методы диагностики результатов обучения		
	У20	Способность находить и использовать методическую литературу, ресурсы сетевой (цифровой) образовательной среды, необходимые для организации процесса обучения обучающихся		
	У23	Способность анализировать эффективность процесса обучения		
	У27	Умение разрабатывать (осваивать) и применять современные психолого-педагогические технологии, основанные на знании законов развития личности и поведения в реальной и виртуальной среде		
	У28	Умение разрабатывать и реализовывать индивидуальные образовательные маршруты, индивидуальные программы развития и индивидуально-ориентированные		

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель <sup>2</sup> овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в ФОС <sup>3</sup>	
			Текущий контроль <sup>4</sup>	Промежуточная аттестация <sup>4</sup>
		образовательные программы с учетом личностных и возрастных особенностей обучающихся		

#### 4 Описание процедуры оценивания

Результаты обучения по дисциплине, уровень сформированности компетенций оцениваются по четырём бальной шкале оценками: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Текущая аттестация по дисциплине проводится с целью систематической проверки достижений обучающихся. Объектами оценивания являются: степень усвоения теоретических знаний, уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы, качество выполнения самостоятельной работы, учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине).

При проведении промежуточной аттестации оценивается достижение студентом запланированных по дисциплине результатов обучения, обеспечивающих результаты освоения образовательной программы в целом.

#### Критерии оценивания устного ответа

(оценочные средства: *собеседование*)

**5 баллов** - ответ показывает прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа; умение приводить примеры современных проблем изучаемой области.

**4 балла** - ответ, обнаруживающий прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается одна - две неточности в ответе.

**3 балла** – ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой предметной области, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы; знанием основных вопросов теории; слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры; недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа; неумение привести пример развития ситуации, провести связь с другими аспектами изучаемой области.

**2 балла** – ответ, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы; незнанием основных вопросов теории, несформированными навыками анализа явлений, процессов; неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием

логичности и последовательности. Допускаются серьезные ошибки в содержании ответа; незнание современной проблематики изучаемой области.

### **Критерии оценивания письменной работы**

(оценочные средства: *практическое задание*).

**5 баллов** - студент выразил своё мнение по сформулированной проблеме, аргументировал его, точно определив ее содержание и составляющие. Проблема раскрыта полностью, выводы обоснованы. Приведены данные отечественной и зарубежной литературы, статистические сведения, информация нормативно-правового характера. Студент владеет навыком самостоятельной работы по заданной теме; методами и приемами анализа теоретических и/или практических аспектов изучаемой области. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет; графически работа оформлена правильно.

**4 балла** - работа характеризуется смысловой цельностью, связностью и последовательностью изложения; допущено не более 1 ошибки при объяснении смысла или содержания проблемы. Проблема раскрыта. Не все выводы сделаны и/или обоснованы. Для аргументации приводятся данные отечественных и зарубежных авторов. Продемонстрированы исследовательские умения и навыки. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет. Допущены одна-две ошибки в оформлении работы.

**3 балла** – студент проводит достаточно самостоятельный анализ основных этапов и смысловых составляющих проблемы; понимает базовые основы и теоретическое обоснование выбранной темы. Проблема раскрыта не полностью. Выводы не сделаны и/или выводы не обоснованы. Проведен анализ проблемы без привлечения дополнительной литературы. Допущено не более 2 ошибок в смысле или содержании проблемы, оформлении работы.

**2 балла** - работа представляет собой пересказанный или полностью переписанный исходный текст без каких бы то ни было комментариев, анализа. Не раскрыта структура и теоретическая составляющая темы. Проблема не раскрыта. Выводы отсутствуют. Допущено три или более трех ошибок в смысловом содержании раскрываемой проблемы, в оформлении работы.

### **Критерии оценивания тестового задания**

Оценка	<i>Отлично</i>	<i>Хорошо</i>	<i>Удовлетворительно</i>	<i>Неудовлетворительно</i>
Количество правильных ответов	91 % и $\geq$	от 81% до 90,9 %	не менее 70%	менее 70%

### **Критерии выставления оценки студенту на зачете/ экзамене**

(оценочные средства: *письменный опрос*)

Оценка по промежуточной аттестации	Характеристика качества сформированности компетенций
«зачтено» / «отлично»	Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на продвинутом уровне: обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при



	видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.
«зачтено» / «хорошо»	Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на базовом уровне: основные знания, умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.
«зачтено» / «удовлетворительно»	Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на пороговом уровне: имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, в ходе контрольных мероприятий допускаются значительные ошибки, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ, при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.
«не зачтено» / «неудовлетворительно»	Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на уровне ниже порогового: выявляется полное или практически полное отсутствие знаний значительной части программного материала, студент допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, умения и навыки не сформированы.

## 5. Структура контрольных заданий

### 5.1 Вопросы для письменного опроса:

1. Понятие множества и элемента множества.
2. Способы задания множеств. Отношения между множествами и их свойства.
3. Объединение, пересечение и вычитание множеств.
4. Свойства объединения и пересечения (с иллюстрацией на кругах Эйлера).
5. Примеры заданий из начального курса математики, при выполнении которых учащиеся явно (или неявно) выполняют пересечение, объединение, вычитание множеств.
6. Разбиение множества на классы (классификация).
7. Примеры разбиения множеств на два (три, четыре и т. д.) подмножества.
8. Примеры заданий на классификацию из начального курса математики.
9. Декартово произведение множеств, его свойства.
10. Понятие кортежа.
11. Примеры заданий из начального курса математики, связанных с образованием декартова произведения множеств.
12. Особенности математических понятий.
13. Объем и содержание понятия.
14. Отношения между понятиями.
15. Остенсивные и контекстуальные определения понятий, их отличие от определений через род и видовое отличие.
16. Примеры понятий из начального курса математики.
17. Структура определения понятия через род и видовое отличие. Требования к таким определениям.
18. Использование определений через род и видовое отличие при решении задач на распознавание.
19. Примеры понятий из начального курса математики, находящихся в родовидовых отношениях.
20. Элементарные и составные высказывания.
21. Правила определения значений истинности составных высказываний.
22. Примеры элементарных (простых) и составных высказываний из начального курса математики.
23. Высказывательная форма, ее область определения и множество истинности.
24. Составные высказывательные формы, правила определения их множеств истинности.
25. Примеры высказывательных форм из начального курса математики.
26. Высказывания с кванторами. Способы установления значения истинности таких высказываний.
27. Примеры высказываний с кванторами из начального курса математики.
28. Отношения логического следования и равносильности между математическими предложениями.
29. Разные способы прочтения предложений  $A(x) \vee B(x)$  и  $A(x) \wedge B(x)$ .
30. Логическая структура теоремы и правила.
31. Примеры правил из начального курса математики с анализом их логической структуры.
32. Дедуктивные умозаключения. Простейшие схемы дедуктивных умозаключений.
33. Примеры построения дедуктивных умозаключений с использованием этих схем.

34. Неполная индукция и аналогия, их взаимосвязь с дедуктивными умозаключениями.
35. Примеры умозаключений из начального курса математики с использованием неполной индукции и аналогии.
36. Особенности математического доказательства.
37. Способы доказательств.
38. Примеры доказательств из начального курса математики.
39. Понятие комбинаторной задачи. Элементы комбинаторики.
40. Правила комбинаторики (правило суммы, правило произведения).
41. Формулы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.
42. Примеры задач на применение правил и формул комбинаторики.
43. Определение суммы и произведения событий, их иллюстрация с помощью диаграмм Венна.
44. Теорема сложения вероятностей несовместных событий, примеры ее применения.
45. Теорема о сумме вероятностей событий, образующих полную группу, примеры ее применения.
46. Теорема о сумме вероятностей противоположных событий, примеры ее применения.
47. Условная и безусловная вероятности.
48. Зависимые и независимые события, события независимые в совокупности.
49. Теоремы умножения вероятностей, примеры их применения.
50. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
51. Понятие случайной величины.
52. Дискретная и непрерывная случайные величины.
53. Закон распределения дискретной случайной величины.
54. Математические операции над случайными величинами.
55. Понятие числовых характеристик.
56. Определение математического ожидания дискретной случайной величины.
57. Свойства математического ожидания.
58. Вероятностный смысл математического ожидания.
59. Определение дисперсии дискретной случайной величины.
60. Свойства дисперсии.
61. Определение среднего квадратического отклонения.
62. Определение моды.
63. Определение функции распределения вероятностей.
64. Свойства этой функции.
65. Нахождение функции распределения вероятностей дискретной случайной величины по известному закону распределения.
66. Нахождение закона распределения дискретной случайной величины по известной функции распределения.
67. Определение непрерывной случайной величины.
68. Определение плотности распределения вероятностей. Свойства плотности распределения вероятностей.
69. Нахождение функции распределения по известной плотности.
70. Нахождение плотности распределения по известной функции распределения.
71. Нахождение вероятности того, что случайная величина примет значение из некоторого интервала.
72. Нахождение математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения, моды, медианы.
73. Математическая статистика как наука, ее основные задачи.
74. Генеральная и выборочная совокупности.

75. Общие сведения о выборочном методе (сущность выборочного метода, репрезентативная выборка, виды выборок, важнейшая задача выборочного метода).
76. Статистическое распределение выборки.
77. Полигон и гистограмма.
78. Основные характеристики статистического распределения (выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение, мода и медиана).
79. Статистическая гипотеза (параметрическая, непараметрическая).
80. Нулевая и конкурирующая, простая и сложная гипотезы.
81. Ошибки первого и второго рода.
82. Статистической критерий проверки нулевой гипотезы.
83. Наблюдаемое значение критерия.
84. Критическая область, область принятия гипотезы.
85. Основной принцип проверки статистических гипотез.
86. Критические точки. Критерий согласия.
87. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.
88. Критерий согласия Пирсона.
89. Понятие алгоритма.
90. Виды алгоритма.
91. Свойства алгоритма.
92. Методические особенности формирования алгоритмических умений в младшем школьном возрасте.

## 5.2. Практические задания

**Практическое задание 1.** Упражнения «Отношения между множествами».

**Практическая работа 2.** Упражнения «Отношения над множествами».

**Практическое задание 3.** Объем и содержание математического понятия. Отношения между понятиями.

**Практическое задание 4.** Определение математических понятий.

**Практическое задание 5.** Высказывания и высказывательные формы.

**Практическое задание 6.** Элементарные высказывания. Логические связки. Составные высказывания.

**Практическое задание 7.** Высказывания с кванторами. Значения истинности высказываний, содержащих кванторы.

**Практическое задание 8.** Структура теорем. Виды теорем. Закон контрапозиции.

**Практическое задание 9.** Умозаключения и их виды.

**Практическое задание 10.** Схемы дедуктивных умозаключений.

**Практическое задание 11.** Правила суммы и произведения. Размещения и сочетания.

**Практическое задание 12.** Вероятность события и её вычисление.

**Практическое задание 13.** Элементы комбинаторики и теории вероятности.

**Практическое задание 14.** Задачи математической статистики. Генеральная и выборочные совокупности. Статистическое распределение выборки. Полигон и гистограмма.

**Практическое задание 15.** Выполнение упражнений на первичную статистическую обработку информации и результатов исследований, графическое представление данных.

**Практическое задание 16.** Проведение опытно-экспериментальной работы по формированию умения строить простейшие алгоритмы на уроках математики в начальной школе.

### **3.3. Самостоятельная работа**

*Раздел 1. Элементы логики*

*Тема 1.1-1.4*

- Подготовка сообщений по темам: понятие множества, элементы множества, подмножества, круги Эйлера;

- Решение задач на «распознавание» при формировании математических понятий;

- Решение заданий по темам «Высказывания, логические операции над высказываниями»;

- Решение заданий по темам «Высказывательные формы (предикаты), логические операции над предикатами»;

- Определение значения истинности высказываний, обучение учащихся способам обоснования истинности высказываний (дедуктивные рассуждения, эксперимент, вычисления, измерения).

*Раздел 2. Математическая статистика.*

*Тема 2.1-2.2*

- Решение комбинаторных задач, соответствующих специфике профессиональной деятельности;

- Проверка статистических гипотез. Критерий Пирсона;

- Проверка гипотезы о виде распределения генеральной совокупности.

*Раздел 3. Алгоритмы и их свойства.*

*Тема 3.1.*

- Решение тренировочных заданий на развитие алгоритмического мышления.

## Ключи к оценочным материалам

### 5. Структура контрольных заданий

#### 5.1 Вопросы для письменного опроса:

1. В математике часто рассматриваются те или иные группы объектов как единое целое: натуральные числа, треугольники, квадраты и др. Все эти различные совокупности называют множествами.

Множество – это совокупность объектов, которые обладают одним или несколькими общими свойствами. В математике множество является одной из фундаментальных понятий и используется для решения широкого спектра задач. Оно позволяет объединять и сравнивать объекты, а также выполнять операции над ними, такие как объединение, пересечение, разность и др.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита:  $A, B, C, D, \dots, Z$ . Множество, не содержащее ни одного объекта, называется пустыми обозначается символом  $\emptyset$ .

Объекты, из которых образовано множество, называются элементами.

Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита:  $a, b, c, \dots, z$ .

Предложение «Объект  $a$  принадлежит множеству  $A$ » можно записать, используя символы:  $a \in A$ . Предложение «Объект  $a$  не принадлежит множеству  $A$ » можно записать так:  $a \notin A$ .
2. Наиболее простым способом является перечисление элементов множества. Например, множество цветов радуги можно задать таким образом: {красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый}. Также существуют способы задания множеств с помощью выражений, например,  $\{x \mid x > 0\}$  задает множество положительных чисел.

Важный способ задания множества – выделение его как части некоторого основного множества. Основное множество образуется всеми элементами какого-нибудь определённого типа. Например, множество целых чисел, множество простых чисел и т.п. В качестве примера рассмотрим основное множество целых чисел и выберем в нём те числа, которые делятся на 2, т.е. чётные числа. Мы получили множество чётных чисел, которое является подмножеством основного множества целых чисел. В общем случае, если все элементы множества  $A$  являются также элементами множества  $B$ , то мы говорим, что  $A$  есть подмножество  $B$ , или  $A$  включено в  $B$ , и обозначаем это так:  $A \subset B$ . Если оказалось, что одновременно  $A \subset B$  и  $B \subset A$ , то эти множества называются равными, что обозначается  $A = B$ . Проще говоря, равные множества состоят из одних и тех же элементов. Из того, что  $A \subset B$  и  $B \subset C$  следует, что  $A \subset C$  (т.е. отношение включения множеств является транзитивным).
3. Пусть задано некоторое основное множество  $M$  и его подмножества  $A$  и  $B$ .

Определение 1.1. Объединение  $A \cup B$  этих множеств определяется, как подмножество множества  $M$ , состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств  $A$  и  $B$ .

Определение 1.2. Пересечение  $A \cap B$  этих множеств определяется, как подмножество множества  $M$ , состоящее из элементов, одновременно входящих как в множество  $A$ , так и в множество  $B$ .

Определение 1.3. Дополнение  $A$  с множества  $A$  определяется, как подмножество множества  $M$ , не содержащее элементов множества  $A$ . Часто дополнение множества обозначают  $A^c$

4.

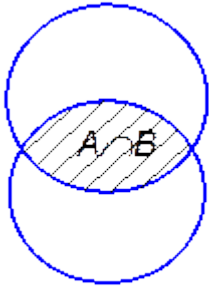


Рис. 1

1. *Пересечением множеств A и B* называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

Если представить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то пересечение данных множеств изобразится заштрихованной областью (рис. 1).

В том случае, когда множества A и B не имеют общих элементов, то говорят, что их пересечение пусто. =  $\emptyset$ .

Операция, при помощи которой находят пересечение множеств, называется также *пересечением*.

Пример.

1)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;  $B = \{4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{4, 5\}$

2) Пересечением множества прямоугольников и множества ромбов является множество квадратов.

3) Пересечением множества чётных чисел и множества нечётных чисел пусто.

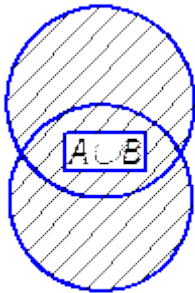


Рис. 2

2. *Объединением множеств A и B* называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

Если представить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то объединение данных множеств изобразится заштрихованной областью (рис. 2).

Операция, при помощи которой находят объединение множеств, называется также *объединением*.

5.

Задача 1. Все мои подруги выращивают в своих квартирах растения. Шестеро из них разводят кактусы, а пятеро - фиалки. И только у двоих есть и кактусы, и фиалки.

Угадайте, сколько у меня подруг?

*Решение.*

$6 + 5 - 2 = 9$  (подруг)

Задача 2. Совсем недавно мы с подругами отдыхали на турбазе. Прибыв на место, мы обнаружили, что 12 человек привезли с собой бутерброды с колбасой, 5 - с сыром и 9 - с маслом. Трое сделали бутерброды двух видов: и с колбасой, и с маслом, я захватила с собой бутерброды с маслом и с сыром, но не оказалось ни одного отдыхающего, который привез бы бутерброды с колбасой и бутерброды с сыром. Сколько человек было в нашей компании?

*Решение.*

$$12 + 5 + 9 - 3 - 1 = 22 \text{ (чел.)}$$

Задача 3. Каждая семья, живущая в нашем доме, выписывает или газету, или журнал, или то и другое вместе. 75 семей выписывают газету, а 27 семей выписывают журнал, и лишь 13 семей выписывают и журнал, и газету. Сколько семей живет в нашем доме?

*Решение.*

$$75 + 27 - 13 = 89 \text{ (семей)}$$

Задача 4. Из 40 учащихся нашего класса 32 любят молоко, 21 - лимонад, а 15 - и молоко, и лимонад. Сколько ребят в нашем классе не любят ни молоко, ни лимонад?

*Решение.*

$$40 - (32 + 21 - 15) = 2 \text{ ученика не любят ни молоко, ни лимонад.}$$

6. Классификация в любой области человеческой деятельности связана с разбиением множества на подмножества (классы). Например, классификация частей речи, членов предложения, чисел, геометрических фигур и так далее. Полученные подмножества должны обладать следующими свойствами:
- 1) они не должны быть пустыми;
  - 2) не должны содержать общих элементов;
  - 3) объединение всех подмножеств должно равняться самому множеству.
- Разбиение множества на классы называют классификацией. Классификацию можно выполнять при помощи свойств элементов множества.
7. Например, натуральные числа можно разбить на четные и нечетные. Буквы русского языка можно разбить на гласные и не гласные. Вообще, если на множестве  $X$  задано одно свойство  $A$ , то это множество разбивается на два класса: первый класс – объекты, обладающие свойством  $A$ , второй класс – объекты, не обладающие свойством  $A$ .
8. Найди лишнее число в каждом ряду:
- 5,10,11,15,20  
-40,30,19,20,70  
-12,16,34,13,18  
-23,43,58,73,93
- Раздели числа на группы:
- 19800,235178,763891,92700,335058,47500  
- 73210,589612,72144,785632,932102,86331  
- 151510,13854,27324,171613,28744
- Раздели выражения на две группы и объясни почему ты сделал такой выбор:
- 15:2; 8:4; 18:7; 21:4;  
32:2; 44:4; 39:7; 12:6;  
22:4; 15:3.
9. Декартово произведение множеств **Определение 1.** Пусть даны два множества,  $A$  и  $B$ . образуем множество упорядоченных пар элементов, у которых первый элемент принадлежит  $A$ , а второй –  $B$ . Полученное множество называется декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  и обозначается  $A \times B$ . Декартово произведение двух множеств обладает следующими свойствами:  $A \times B \neq B \times A$  – некоммутативность ·  $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$  – ассоциативность ·  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$  – дистрибутивность по объединению ·  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$  – дистрибутивность по пересечению ·  $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$  – дистрибутивность по разности ·  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ .
10. Пусть даны множества  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . Кортежем длины  $n$  составленным из



элементов этих множеств называется конечная

последовательность  $\lambda = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ , где для всех  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ )

имеем  $x_k \in X_k$ . Элемент  $x_k$  называется  $k$ -ой координатой (или  $k$ -ой координатой) кортежа  $\lambda$ .

Из множеств  $A = \{a, b, c\}$  и  $B = \{1, 2\}$  можно составить 6 кортежей длины 2:  $(a, 1)$ ,  $(a, 2)$ ,  $(b, 1)$ ,  $(b, 2)$ ,  $(c, 1)$ ,  $(c, 2)$ .

Два кортежа равны в том и только в том случае, когда они имеют одинаковую длину, причем их координаты стоящие на местах с одинаковыми номерами равны.

11.

Боря и Ваня занимаются футболом и шахматами. Боря – второклассник, а футболист учится в третьем классе. Кто чем занимается?. Мама налила молоко и квас в банку и кувшин. Сосуд с квасом стоит на столе, а кувшин – в холодильнике. Что куда налили? В квартирах №№ 1, 2, 3 жили белый, черный и рыжий котята. Черный котенок не жил в № 1 и № 2. в квартире № 1 не жил белый котенок. В какой квартире жил каждый котенок?

Три клоуна Бим, Бом и Бам вышли на арену цирка. На них были синяя, зеленая и красная рубашки и туфли тех же цветов. У Бима цвета рубашки и туфель совпадали. У Бома ни туфли, ни рубашка не были красными. Бам был в зеленых туфлях и рубашке дру-гого цвета. Как были одеты клоуны?

Жили три друга: учитель, врач и рабочий. Их фамилии Борисов, Иванов и Семенов. У учителя нет ни братьев, ни сестер, он самый младший из друзей. Семенов старше врача и женат на сестре Борисова. Назовите фамилии учителя, врача и рабочего.

В пионерский лагерь приехали три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из фамилий: Иванов, Семенов и Герасимов. Миша не Герасимов, отец Володи инженер. Володя учится в 6-м классе. Герасимов учится в 5-м классе. Отец Иванова слесарь. Какая фамилия у каждого из ребят?

12.

Сущность математических понятий

- Понятие – форма мышления, отражающая общие и существенные свойства и отношения вещей и явлений материального мира.
- Математическое понятие – отражение в мышлении отличительных свойств форм и количественных отношений действительного мира.

В познании понятия выражаются с помощью признаков посредством речи и символов  
Понятие – форма мысли, отражающая объекты (предметы или явления) в их существенных и общих свойствах.

Языковая форма понятия – слово или группа слов.

Составить понятие об объекте – это значит уметь отличить его от других сходных с ним объектов.

Главная особенность математических понятий

Математические объекты, о которых необходимо составить понятие, в реальности не существуют.

Математические объекты созданы умом человека.

Это идеальные объекты, отражающие реальные предметы или явления.

Математические объекты существуют лишь в мышлении человека и в тех знаках и символах, которые образуют математический язык.

Наиболее известным и широко распространенным способом определения понятий, известным еще со времен Древней Греции, является определение через ближайший род (или класс) предметов, к которому

относится определенный вид. Как показывает само название, для такого определения необходимо, во-первых, установить ближайший род (или класс) предметов, во-вторых, указать видовое отличие определяемого понятия. Так, чтобы определить понятие квадрата, можно указать несколько родов (или классов) геометрических объектов, в объем которых входит объем понятия квадрата. К ним относятся четырехугольники, параллелограммы, прямоугольники и ромбы. Ближайшими же родами служат ромбы и прямоугольники.

13. \* Содержанием понятия называется совокупность существенных признаков одноэлементного класса или класса однородных предметов, отраженных в понятии. Содержанием понятия «квадрат» является совокупность двух существенных признаков: «быть прямоугольником» и «иметь равные стороны».
- \* Объем понятия – это совокупность всех предметов, обладающих данными существенными признаками.
- Понятие «квадрат» - объем: множество всевозможных квадратов, какие можно изобразить, представить.
- Понятие «Нечетное число»:
- Содержание – «не делится на 2»;
- Объем – «множество нечетных чисел».
3. Понятия классифицируют по различным признакам.
- По объему понятия делятся на единичные, общие и пустые.
- Объем единичного понятия составляет одноэлементный класс. Например, «0», «1000».
- Объем общего понятия включает число элементов больше единицы. Среди общих понятий можно выделить те, объем которых включает конечное множество предметов (например, «однозначное натуральное число») и те, объем которых включает бесконечное множество предметов (например, «квадрат»).
- Кроме общих и единичных понятий по объему выделяют понятия пустые (с нулевым объемом), т.е. такие, объем которых представляет пустое множество (например, «вечный двигатель», «баба Яга», «круглый квадрат», «человек, проживший 300 лет» и др.).
- По содержанию различают понятия сравнимые и несравнимые.
- Сравнимые понятия имеют некоторые общие признаки (квадрат и прямоугольник).
- Несравнимые понятия не имеют общих признаков (четное число и треугольник; число «2» и окружность).
- Сравнимые понятия делятся на совместимые и несовместимые.
- Совместимые – это такие понятия, объемы которых имеют хотя бы один общий элемент.
- Несовместимые – это такие понятия, объемы которых не имеют ни одного общего элемента (например, четные и нечетные числа).
14. Понятие является одной из форм абстрактного мышления, в которой отражаются существенные признаки одноэлементного класса или класса однородных предметов.
- \* Существенные признаки – это признаки, без которых объект не может существовать (четное число – делится на 2, в треугольнике – стороны, углы).
- \* Несущественные – плотность, размер. В каждом понятии выделяют содержание и объем.
- Объемы совместимых понятий могут находиться в трех видах отношений:
- а) отношение тождества – объемы совпадают.

Например, «биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника» и «высота равнобедренного треугольника».

б) отношение пересечения

A – «четные числа»

B – «числа больше 50»

в) отношение включения

A – «натуральные числа» B < A B – «натуральные числа, оканчивающиеся нулем»

Несовместимые понятия также могут находиться в трех видах отношений:

а) отношение соподчинения – понятия имеют общий род

A – многоугольники

B – треугольники A

C – четырехугольники

D – пятиугольники

б) отношение противоречивости – признаки двух понятий противоречивы

A – четное число AA

B – нечетное число

или

A – уравнение

B – неравенство

в) отношение противоположности

A – острый угол

B – тупой угол прямой угол

15. Остенсивные (от лат. ostendere – показывать) определения – это такие определения, которые устанавливают значение терминов путем демонстрации объектов, которые этим термином определяются. С использованием такого определения в начальной школе вводится понятие «числовое выражение», «числовое равенство», «угол» и т.д. В контекстуальных определениях содержание нового понятия раскрывается через отрывок текста, через контекст, через анализ конкретной ситуации, описывающей смысл определяемого понятия с другими, известными, и тем самым косвенно раскрывается его содержание. Примером контекстуального определения может быть определение уравнения и его решения, приведенного в учебнике математики для 2 класса. Остенсивные определения, как и контекстуальные, характеризуются некоторой незавершенностью. Действительно, определение посредством показа не выделяет числовые равенства (неравенства) из других предложений, в нем не указываются свойства, характерные для данных понятий. Они только связывают термины с определяемыми объектами. Поэтому после контекстуального или остенсивного определения понятия необходимо дальнейшее изучение свойств так определенных объектов.
16. Контекстуальные определения круга и многоугольника. Остенсивные определения треугольника и четырехугольника.
- ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ**
1. Какие числа называются натуральными числами?  
Натуральными числами называют числа, предназначенные для счёта предметов.
  2. На что указывает любое натуральное число?  
Любое натуральное число  $n$  указывает на некоторое количество предметов.
  3. Что показывает каждое натуральное число?  
Каждое натуральное число показывает, сколько единиц оно содержит.
  4. Какая последовательность чисел (множество чисел) называется натуральным рядом?  
Натуральным рядом  $N$  называют последовательность (множество) натуральных чисел, расположенных в порядке счёта предметов (в порядке возрастания) и разделённых запятой.

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ .

5. Какие числа называются равными?

А) Если натуральные числа  $n$  и  $m$  указывают на одно и то же количество предметов, то они равны  $n = m$ .

Б) Если два натуральных числа стоят на одном и том же месте в натуральном ряду  $N$ , то они равны.

В) Если натуральные числа  $n$  и  $m$  содержат одно и то же количество единиц, то они равны  $n = m$ .

17. Назовем ту последовательность действий, которую мы должны соблюдать, если хотим воспроизвести определение знакомого понятия или построить определение нового:

1. Назвать определяемое понятие (термин).

2. Указать ближайшее родовое (по отношению к определяемому) понятие.

3. Перечислить свойства, выделяющие определяемые объекты из объема родового, т. е. сформулировать видовое отличие.

4. Проверить, выполнены ли правила определения понятия (соразмерно ли оно, нет ли порочного круга и т.д.).

При изучении математики в начальных классах определения через род и видовое отличие используют редко. Связано это как с особенностями курса, так и с возможностями детей.

18. Критерием сформированности понятия является умение решать задачи на распознавание, т. е. задачи, в которых требуется определить принадлежит ли объекту данного понятия тот или иной объект или не принадлежит. Критерием сформированности понятия является умение решать задачи на распознавание, т. е. задачи, в которых требуется определить принадлежит ли объекту данного понятия тот или иной объект или не принадлежит. Примеры задач на распознавание. «Выпиши в один столбик равенства, а в другой – неравенства.  $3-1=2$   $5-12$ .  $4-11$   $4+1=5$   $1+1=2$ ». [4, с.40]. Примеры задач на распознавание «Покажи «лишнее» число: 83, 54, 49, 100, 32, 23, 94.

19. Решение задач на распознавание принадлежности объекта объекту данного понятия основывается, как правило, на определении этого понятия через род и видовое отличие. Если определение содержит одно видовое свойство, то распознавание проводится по алгоритму:

1. Проверяем, принадлежит ли объект объекту родового понятия.

2. Если окажется, что не принадлежит, то проверку прекращаем и делаем вывод, что объект не принадлежит объекту понятия.

3. Если объект принадлежит объекту родового понятия, то продолжаем проверку и выясняем, обладает ли объект видовым свойством.

4. Если объект обладает этим свойством, то делаем вывод о его принадлежности к объекту видового понятия.

5. Если окажется, что объект этим свойством не обладает, то делаем вывод, что объект не принадлежит объекту видового понятия[6].

Рассмотрим, например. В нем надо найти (распознать) уравнения среди следующих записей и решить их:

1)  $34+x$ ; 2)  $78-25=53$ ; 3)  $x+3>2$ ;

4)  $16+d=29$ ; 5)  $x+6=54$ ; 6)  $x-19$ . [3, с.8]

20. Высказывание -повествовательное предложение, которое является или истинным или ложным. Оно является основным математическим понятием,поэтому не определяется точно. Высказывания обозначаются большими латинскими буквами. Не считаются высказываниями вопросительные и восклицательные предложения,а так же предложения содержащие поздравления,сожаления,приказания и просьбы. Высказывания не всегда записываются словами. Одно и тоже высказывание может быть представлено в разном виде. В высказываниях выделяются тема и рема. Тема-то,о чем говорится в высказывании. Рема- то,что сообщается о теме. Высказывания бывают простыми и сложными. Высказывания, представляющие собой одно утверждение называют простым или элементарным. «Москва-столица России». Высказывания,которые получаются из простых с помощью синтаксических связок «и», «не», «или», «если,то», «Тогда и только тогда,когда» называются сложными или составными. Из двух предложений можно образовать новые предложения, используя для этого союзы “и”, ”или”, “если....,то....”, “тогда и только тогда”, и др. С помощью частицы “не” или словосочетания “неверно, что” можно из данного предложения получить новое. Слова “и”, ”или”, “если....,то....”, “тогда и только тогда, когда”, а также частицу “не” ( “неверно, что”) называют логическими связками. Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют составными. Предложения, не являющиеся составными, называются элементарными. Примеры составных высказываний:  
1. Число 28 четное и делится на 7.  
Это предложение образовано из двух элементарных с помощью логической связки “и”.  
2. Если число 28-делится на 2, то оно четное.  
Это предложение образовано из двух элементарных с помощью слов «если,...то...»  
3. Число 14 не делится на 4.  
Это предложение образовано из предложения с помощью частицы “не”.
21. Для определения истинности составного высказывания необходимо выполнить несколько шагов:
1. Анализ простых высказываний: Вначале следует анализировать и определить значения истинности каждого простого высказывания, входящего в составное высказывание. Простое высказывание может быть явно дано или выведено из другой информации.
  2. Определение логических операций: Вторым шагом является определение логических операций, связывающих простые высказывания. Логические операции могут быть «и» (логическое умножение), «или» (логическое сложение), «не» (отрицание) и т.д.
  3. Применение логических операций: Далее следует применить соответствующую операцию к простым высказываниям согласно заданной логической связке. Результатом будет составное высказывание.

4. Проверка истинности составного высказывания: В зависимости от логической операции и значений истинности простых высказываний можно определить истинность или ложность составного высказывания. Например, если простые высказывания, связанные операцией «и», оба истинные, то составное высказывание также будет истинным. Если хотя бы одно из простых высказываний ложное, то составное высказывание будет ложным.

Для упрощения анализа составных высказываний, существуют таблицы истинности, в которых перечислены все возможные истинностные значения для каждого простого высказывания и их комбинаций. Путем применения таблицы истинности можно определить истинность или ложность составного высказывания без необходимости выполнения всех возможных комбинаций простых высказываний.

22. Относительно понятий и отношений между ними можно высказывать различные суждения. Языковой формой суждений являются повествовательные предложения. Например, в начальном курсе математики можно встретить такие предложения:

1) число 10-четное;

2)  $2+5>8$ ;

3)  $x+5=8$ ;

4) В числе 15 один десяток и 5 единиц;

5) От перестановки множителей произведение не изменяется;

6) Некоторые числа делятся на 3.

Приведем примеры составных предложений:

1) Число 28 четное и делится на 7.

Это предложение образовано из двух элементарных: «число 28 четное», «число 28 делится на 7» с помощью логической связки «и».

2) Число  $x$  меньше или равно 8.

Это предложение образовано из двух элементарных: «число  $x$  меньше 8», «число  $x$  равно 8» с помощью логической связки «или».

3) число 14 не делится на 4.

Это составное высказывание образовано из предложения «число 14 делится на 4» с помощью частицы «не».

23. Предложение  $A(x)$  с переменной  $x$ , где  $x \in X$ , которое в результате замены переменной допустимыми значениями обращается в высказывание, называется предикатом или высказывательной формой.

В зависимости от числа переменных различают одноместные, двухместные, трехместные и тд. Предикаты:  $A(x)$ ;  $B(x,y)$ ;  $C(x,y,z)$

Например:  $x>5$ - одноместный предикат;  $x$  делится на  $y$  – двухместный;  $x+2y=z$  – трехместный предикат.

*Множество всех допустимых значений переменной, при подстановке которых в предикат  $P(x)$  получается истинное или ложное высказывание, называют областью определения предиката.*

Предикат считается заданным, если указать множество всех допустимых значений переменной. Например: предикат  $3x+7=15$  может быть задан на множестве натуральных чисел  $N$ , или на множестве действительных чисел  $R$ .

Если множество истинности  $Tr$  предиката  $P(x)$  совпадает с множеством  $X$  на котором он задан ( $Tr=X$ ), то такой предикат называют тождественно истинным.

Если множество истинности предиката  $P(x)$  пусто ( $Tr=\emptyset$ ), то предикат называют тождественно ложным. Два предиката  $P(x)$  и  $Q(x)$  называют равносильными, если они заданы на одном и том же множестве  $X$  и их множества истинности совпадают.

24. Множество тех значений переменной из области определения высказывательной формы (предиката), при подстановке которых получаем истинные высказывания, называется множеством истинности высказывательной формы (предиката).  
 примеры суждений, языковой формой которых будут сложные предложения.  
 Например: «Если треугольник равнобедренный, то углы при основании в нем равны». Естественно возникает вопрос: как определить значение истинности таких высказываний и находить множество истинности таких высказывательных форм? Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо познакомиться с некоторыми логическими понятиями.  
 В логике считают, что из двух данных предложений можно образовать новые предложения, используя для этого союзы «и», «или», «если..., то...», «тогда и только тогда, когда» и др. С помощью частицы «не» или словосочетания «неверно, что» можно из данного предложения получить новое.  
 Слова «и», «или», «если..., то...», «тогда и только тогда, когда», а также частицу «не» (слова «неверно, что») называются *логическими связками*. Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют *составными*. Предложения, не являющиеся составными, называют *элементарными*.
25. Предложение  $x+5=8$  не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать: истинно оно или ложно. Однако при подстановке конкретных значений переменной  $x$  оно обращается в высказывание: истинное или ложное. Например, если  $x=2$ , то  $2+5=8$ -ложное высказывание, а при  $x=3$  оно обращается в истинное высказывание  $3+5=8$ . Предложение  $x+5=8$  называется высказывательной формой. Оно порождает множество высказываний одной и той же формы.  
 По числу переменных, входящих в высказывательную форму, различают одноместные, двухместные и т. д. высказывательные формы и обозначают:  $A(x)$ ,  $A(x, y)$  и т. д. Например,  $x+5=8$  – одноместная высказывательная форма, а предложение «Прямая  $x$  параллельна прямой  $y$ » – двухместная.  
 Следует иметь в виду, что в высказывательной форме переменные могут содержаться неявно. Например, в предложениях: «число четное», «две прямые пересекаются» переменных нет, но они подразумеваются: «Число  $x$  – четное», «Две прямые  $x$  и  $y$  пересекаются».  
 Задание высказывательной формы, как правило, предполагает и задание того множества, из которого выбирают значения переменной (переменных), входящей в высказывательную форму. Это множество называется областью определения высказывательной формы. Например, неравенство  $x > 5$  можно рассматривать на множестве натуральных чисел, а можно считать, что значение переменной  $x$  выбирается из множества действительных чисел. Тогда в первом случае областью определения неравенства  $x > 5$  будет множество натуральных чисел, а во втором – множество действительных чисел.
26. В формулировках математических предложений часто встречаются слова: «каждый», «все», «некоторые», «хотя бы один». Например, свойство противоположных сторон прямоугольника формулируется так: «В любом прямоугольнике противоположные стороны равны», а о свойстве натуральных чисел мы говорили, что «некоторые натуральные числа кратны 3»  
 Выражение «для всякого  $x$ » в логике называется квантором общности по переменной  $x$  (переменная может быть обозначена и другой буквой) и обозначается символом  $\forall x$ .  
 Выражение «существует  $x$  такое, что...» в логике называется квантором существования по переменной  $x$  (переменная может быть обозначена и другой буквой)

и обозначается символом  $\exists x$ .

В математике говорят, что в ложности данного высказывания мы убедились, приведя контрпример.

Вообще истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства. Показать ложность таких высказываний можно, приведя контрпример.

Задача 3. Установить, истинны или ложны следующие высказывания:

а) Среди треугольников есть прямоугольные.

б) Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними.

а) Высказывание истинное.

б) Высказывание ложное.

Вообще истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера. Показать ложность таких высказываний можно, проведя доказательство.

27. Примеры: 1. Любой квадрат является параллелограммом = Некоторые квадраты не являются параллелограммами. 2. Существуют натуральные числа кратные 5. = Все натуральные числа не кратны 5. Высказывания, содержащие кванторы, играют в курсе математики в начальной школе очень большую роль, т.к. с помощью таких высказываний учащимся разъясняются многие математические понятия, изучаемые в курсе математики в начальной школе. С помощью высказываний, содержащих квантор общности, раскрываются такие понятия как: свойства арифметических действий (коммутативное, ассоциативное); рассказывается о геометрических фигурах (все острые углы меньше  $90^0$ ); свойства натурального ряда чисел (при прибавлении к любому числу 1 получается число, которое за ним непосредственно следует).
28. Отношения логического следования и равносильности между математическими предложениями. Примеры предложений из начального курса математики, находящихся в отношении логического следования (равносильности).  
Отношение следования. Высказывательная форма  $B(x)$  следует из высказывательной формы  $A(x)$ , если  $B(x)$  обращается в истинное высказывание при всех тех значениях  $x$ , при которых  $A(x)$  истинна. из  $A$  следует  $B$ , когда  $A$  и  $B$  истинны. как и любое высказывание, предложение  $A(x) \rightarrow B(x)$ , может быть истинным или ложным. истинность устанавливается с помощью доказательства, а ложность - контрпримером.  
истинно - всякое число оканчивающееся на 6 делится на 2. ложно - для того, чтобы число делилось на 5, необходимо чтобы число оканчивалась на 0.  $35:5=7$   
пример: всякий квадрат является прямоугольником. В данном высказывании можно выделить два предложения:  $A(x)$  «четырёхугольник-квадрат» и  $B(x)$  «четырёхугольник-прямоугольник». они находятся в отношении следования:  $A(x) \rightarrow B(x)$ , которое выражено предложением со словом всякий. ответ - из того, что четырёхугольник-квадрат, следует, что он прямоугольник; если четырёхугольник-квадрат, то он прямоугольник.
29. *Высказывательная форма  $B(x)$  следует из высказывательной формы  $A(x)$ , если  $B(x)$  обращается в истинное высказывание при всех тех значениях  $x$ , при которых  $A(x)$  истинна.*  
*Если  $A$  и  $B$  - высказывания, тогда говорят, что из  $A$  следует  $B$ , если всякий раз, когда  $A$  истинно, истинно и  $B$ .*  
*Для обозначения отношения логического следования используется знак  $\vdash$ .*  
*Соединяя две высказывательные формы  $A(x)$  и  $B(x)$  таким знаком, мы получаем высказывание  $A(x) \vdash B(x)$ , прочитать которое можно по - разному:*  
1) Из  $A(x)$  следует  $B(x)$ .  
2) Всякое  $A(x)$  есть  $B(x)$ .



- 3) Если  $A(x)$ , то  $B(x)$ .
- 4)  $B(x)$  есть следствие  $A(x)$ .
- 5)  $A(x)$  есть достаточное условие для  $B(x)$ .
- 6)  $B(x)$  есть необходимое условие для  $A(x)$ .

Например, утверждение о том, что из предложения «число  $x$  кратно 4», следует предложение «число  $x$  кратно 2», можно сформулировать еще так:

- Всякое число, которое кратно 4, кратно и 2.
- Если число кратно 4, то оно кратно и 2.

30. Теорема – математическое предложение, истинность которого доказывается.

Каждая теорема состоит из 3 частей:

- разъяснительная часть
- условие
- заключение

В разъяснительной части описывается, какие точки или фигуры рассматриваются в теореме. Для словесного выражения теорем обычно используют две формы суждений: категоричную, условную (имплекативную).

Категоричная – когда принадлежность или непринадлежность некоторого признака предмету независимо от каких бы то ни было условий.

Условная – когда истинность суждения ставится в зависимости от определенных условий.

Если теорема содержит несколько условий и заключений, то теорема *сложная*.

*Логико* – математический анализ теоремы предполагает:

- 1) установление формы суждения;
- 2) выделение разъяснительной части, условия, заключений;
- 3) установление факта, какая дана теорема – простая или сложная.

$A \rightarrow B$  - прямая теорема

Если разъяснительную часть оставить без изменения, а условие и заключение поменять местами, то получим утверждение обратное данному. ( $B \rightarrow A$ )

Если разъяснительную часть оставить без изменения, а условие и заключение утверждения заменить их отрицанием, то получим утверждение

противоположное данному. ( $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$ )

Если оставить без изменения разъяснительную часть и поменять местами условие и заключение утверждения, противоположного данному, то получим

утверждение, обратное противоположному. ( $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ )

31. При формировании представлений о каждой из названных величин целесообразно ориентироваться на определенные этапы, в которых нашли отражение: математическая трактовка данного понятия, его взаимосвязь с изучением других вопросов начального курса математики, а также психологические особенности младших школьников.

1-й этап. Выяснение и уточнение представлений школьников о данной величине (обращение к опыту ребенка).

2-й этап. Сравнение однородных величин (визуально, с помощью ощущений, наложением, приложением, путем использования различных мерок).

3-й этап. Знакомство с единицей данной величины и с измерительным прибором.

4-й этап. Формирование измерительных умений и навыков.

5-й этап. Сложение и вычитание однородных величин, выраженных в единицах одного наименования.

6-й этап. Знакомство с новыми единицами величин в тесной связи с изучением нумерации и сложения чисел. Перевод однородных величин, выраженных в единицах одного наименования, в величины, выраженные в единицах двух наименований, и наоборот.

7-й этап. Сложение и вычитание величин, выраженных в единицах двух наименований.

8-й этап. Умножение и деление величин на число.

32. Приведем правила построения основных дедуктивных умозаключений, используемых в школе при обучении математике. К условным можно отнести умозаключение, построенное по следующему правилу:

$$\underline{A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow C(x)} \quad (1)$$

$$A(x) \Rightarrow C(x)$$

Над чертой, как правило, даются общие посылки (исходные суждения), а под чертой - вывод (их логическое следование), сама черта заменяет слово «следует»

Посылки и заключение этого умозаключения сформулированы в виде условных суждений. Такие умозаключения еще называются силлогизмами. Количество суждений силлогизмов может быть и больше трех, что усложняет их построение.

Эти правила называют *правилами вывода* или *схемами дедуктивных (правильных) умозаключений*. Правил много, но наиболее часто используются следующие:

$$\underline{A(x) \Rightarrow B(x), A(a)} - \text{правило заключения}$$

$$B(a)$$

$$\underline{A(x) \Rightarrow B(x), B(a)} - \text{правило отрицания}$$

$$A(a)$$

$$\underline{A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow C(x)} - \text{правило силлогизма.}$$

$$A(x) \Rightarrow C(x)$$

Схема (2) называется правилом заключения, а (3) – правилом отрицания. Умозаключения, построенные по этим правилам, состоят из условных суждений и категорических, взятых либо в утвердительной (2), либо отрицательной (3) форме.

Первое суждение (общая посылка) каждого правила является обобщающим, а второе (частная посылка) - представляет собой суждение об объекте  $a$  который обладает свойством предиката  $A$  (2) или не обладает свойством предиката  $B$  (3).

Чтобы построить умозаключение по этим трем правилам необходимо не только сформулировать общую и частную посылку, но и установить логическое следование между этими посылками и формулировкой заключения, т.е. полученного нового истинного суждения.

33. Если запись числа  $x$  оканчивается цифрой 5, то число  $x$  делится на 5. Запись числа 135

оканчивается цифрой 5. Следовательно, число 135 делится на 5.

В качестве общей посылки в этом умозаключении выступает утверждение вида «если  $A(x)$ , то  $B(x)$ », где  $A(x)$  – это «запись числа  $x$  оканчивается цифрой 5», а  $B(x)$  – «число  $x$  делится на 5». Частная посылка представляет собой высказывание, которое получилось из условия общей посылки при  $x = 135$  (т.е. это  $A(135)$ ). Заключение является высказыванием, полученным из  $B(x)$  при  $x = 135$  (т.е. это  $B(135)$ ).

Приведем теперь пример умозаключения, выполненного по правилу отрицания:

Если запись числа  $x$  оканчивается цифрой 5, то число  $x$  делится на 5. Число 177 не делится на 5. Следовательно, оно не оканчивается цифрой 5.

Видим, что в этом умозаключении общая посылка такая же, как и в предыдущем, а частная представляет собой отрицание высказывания «число 177 делится на 5» (т.е. это неверно, что  $B(177)$ ). Заключение – это отрицание предложения «Запись числа 177 не оканчивается цифрой 5» (т.е. неверно, что  $A(177)$ ).

И наконец, рассмотрим пример умозаключения, построенного по правилу силлогизма.

Если число  $x$  кратно 12, то оно кратно 6. Если число  $x$  кратно 6, то оно кратно 3.

Следовательно, если число  $x$  кратно 12, то оно кратно 3.

В этом умозаключении две посылки вида «если  $A(x)$ , то  $B(x)$ » и «если  $B(x)$ , то  $C(x)$ », где  $A(x)$  – это предложение « $x$  кратно 12»,  $B(x)$  – предложение « $x$  кратно 6» и  $C(x)$  – предложение « $x$  кратно 3». Заключение представляет собой высказывание «если  $A(x)$ , то  $C(x)$ ».

34. Как правило, все общие закономерности здесь выводятся индуктивным путем. Так обосновываются переместительные законы сложения и умножения, равенства  $a + 0 = a$ ,  $a \cdot 1 = a$ ,  $a : 1 = a$ ,  $a \cdot 0 = 0$  и другие закономерности.

Рассмотрим, как используется индуктивный метод обучения на примере изучения свойств арифметических действий.

Один из приемов ознакомления младших школьников с переместительным свойством умножения заключается в следующем. Используя различные средства наглядности, школьники вместе с учителем устанавливают, что  $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$ ,  $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$ ,  $7 \cdot 3 = 3 \cdot 7$ . А затем на основе полученных равенств делают вывод о том, что от перестановки мест множителей значение произведения не изменяется.

В данном умозаключении посылками являются первые три равенства, в них утверждается, что для конкретных натуральных чисел выполняется такое свойство. Заключение является утверждением общего характера - переместительное свойство умножения натуральных чисел:  $(\forall a, b \in \mathbb{N}) a \cdot b = b \cdot a$ .

То есть первые три посылки - частного характера; заключение носит общий характер. Такие умозаключения называют неполной индукцией.

Неполная индукция - это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса.

Неполная индукция не является дедуктивным умозаключением, поскольку, рассуждая по такой схеме можно прийти к ложному выводу. Приведем пример индуктивного умозаключения, в результате которого получаем ложное утверждение.

К выводам, полученным при помощи неполной индукции, надо относиться критически. Эти выводы носят характер предположения, гипотезы, которую следует либо доказать (дедуктивным способом), либо опровергнуть. Итак, в процессе познания дедуктивные и индуктивные умозаключения оказываются взаимосвязанными.

Несмотря на то, что индуктивные рассуждения не всегда приводят к правильным выводам, роль их в изучении математики и других предметов велика. В ходе индуктивных рассуждений формируется умение видеть общее в конкретных частных случаях, высказывать предположения.

35. Под аналогией понимают умозаключение, в котором на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии того же признака у другого объекта [20].

Приведем пример рассуждения по аналогии на материале начального курса математики.

#### Пример 1.

При обучении делению на однозначное число используется такой прием. Сначала выясняется: чтобы найти значение выражения  $12:4$ , следует узнать, на какое число надо умножить делитель 4, чтобы получить делимое, т.е. 12. Известно, что  $4 \cdot 3 = 12$ . Значит,  $12 : 4 = 3$ .

Затем учащимся предлагается, рассуждая так же найти, например, частное,  $8 : 4$ . И они сначала находят число, на которое надо умножить 4, чтобы получить 8. Получают число 2 и делают вывод, что  $8 : 4 = 2$ .

Далее, используя тот же способ рассуждений находят частные  $9:3$ ,  $20 : 5$  и др.

Аналогия помогает открывать новые знания, способы деятельности или использовать усвоенные способы действия в измененных условиях.

Вывод при аналогии носит характер предположения, гипотезы и поэтому нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении.

Младшие школьники в своих рассуждениях чаще все же используют индуктивные умозаключения. Следует отметить, что в ряде программ начального образования индуктивный метод обучения школьников является приоритетным. Как правило, все общие закономерности здесь выводятся индуктивным путем. Так обосновываются переместительные законы сложения и умножения, равенства  $a + 0 = a$ ,  $a \cdot 1 = a$ ,  $a : 1 = a$ ,  $a \cdot 0 = 0$  и другие закономерности.

Рассмотрим, как используется индуктивный метод обучения на примере изучения свойств арифметических действий.

Один из приемов ознакомления младших школьников с переместительным свойством умножения заключается в следующем. Используя различные средства наглядности, школьники вместе с учителем устанавливают, что  $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$ ,  $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$ ,  $7 \cdot 3 = 3 \cdot 7$ . А затем на основе полученных равенств делают вывод о том, что от перестановки мест множителей значение произведения не изменяется.

В данном умозаключении посылками являются первые три равенства, в них утверждается, что для конкретных натуральных чисел выполняется такое свойство. Заключение является утверждением общего характера - переместительное свойство умножения натуральных чисел:  $(\forall a, b \in \mathbb{N}) a \cdot b = b \cdot a$ .

То есть первые три посылки - частного характера; заключение носит общий характер. Такие умозаключения называют неполной индукцией.

Неполная индукция - это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса.

Неполная индукция не является дедуктивным умозаключением, поскольку, рассуждая по такой схеме можно прийти к ложному выводу. Приведем пример индуктивного умозаключения, в результате которого получаем ложное утверждение.

#### Пример 1.

Заметим, что  $3 + 5 < 3 \cdot 5$ ;  $2 + 7 < 2 \cdot 7$ ;  $4 + 8 < 4 \cdot 8$ . То есть для некоторых натуральных чисел можно утверждать, что сумма меньше их произведения. И на основании того, что некоторые числа обладают указанным свойством, можно сделать вывод о том, что этим свойством обладают все натуральные числа, т.е.  $(\forall a, b \in \mathbb{N}) a + b < a \cdot b$ . Для опровержения полученного вывода достаточно привести контрпример:  $1 + 2 < 1 \cdot 2$  (ложно).

Таким образом, к выводам, полученным при помощи неполной индукции, надо относиться критически. Эти выводы носят характер предположения.

гипотезы, которую следует либо доказать (дедуктивным способом), либо опровергнуть. Итак, в процессе познания дедуктивные и индуктивные умозаключения оказываются взаимосвязанными.

Несмотря на то, что индуктивные рассуждения не всегда приводят к правильным выводам, роль их в изучении математики и других предметов велика. В ходе индуктивных рассуждений формируется умение видеть общее в конкретных частных случаях, высказывать предположения.

36. При изучении теоремы можно условно выделить следующие этапы:

- 1) подготовительный этап
- 2) введение
- 3) усвоение
- 4) закрепление

I. Осуществляется актуализация знаний, необходимых для введения и доказательства теоремы.

$\frac{3}{4}$  мотивация изучения теоремы:

- a) обобщение необходимых в жизни фактов и явлений и перевод их на математический язык;
- b) показать необходимость знания той или иной теоремы для решения практических задач;
- c) показать, как решалась данная проблема в истории науки.
- d) с помощью практической работы подвести к открытию теоремы.

II.

разобраться в структуре теоремы (дано, доказать);

сделать чертеж и краткую запись

поиск доказательства: он может осуществляться с помощью различных приемов.

например, конструирование идеи доказательства, исходя из требования теоремы; обращение к известным методам доказательства<sup>4</sup> использование идеи рассматривать взаимное расположение данных и появившихся в ходе доказательства фигур и т.д. Завершается поиск составлением плана доказательства.

оформление доказательства

III. С помощью специально подобранных заданий и вопросов осуществить:

Усвоение формулировки

Усвоение доказательства

Решение простейших задач (по готовому чертежу) на непосредственное применение теоремы.

IV. Решение разнообразных задач, повторение доказательства.

*Замечания.*

1. При поиске путей доказательства следует иметь в виду:

1) Если в доказательстве используется известный учащимся метод или доказательство осуществляется по известной уже схеме, то учащимся сообщается метод, а дальше беседа по плану:

$\frac{3}{4}$  каков 1-ый шаг данного метода?

$\frac{3}{4}$  Как это сделать для данной теоремы?

$\frac{3}{4}$  ...

2) если теорема содержит небольшое число этапов доказательства, каждый из которых “прозрачно” связан с другим, то применяем аналогичные рассуждения: что нужно знать, чтобы доказать (с конца)

3) если теорема сложная, то ученикам следует сообщить идею доказательства.

2. На этапе усвоения доказательства задаем вопросы:

Какова схема доказательства?  
Каковы этапы доказательства?  
На чем основывается каждый этап?

- 37.
- Прямое доказательство
  - Индукция
  - От противного
  - Контрапозиция
  - Построение
  - Исчерпывание вариантов
  - Биекция
  - Двойной счёт
38. Доказать, что любое натуральное число, большее единицы, имеет простой делитель. Рассматриваемое число делится на единицу и на само себя. Если других делителей нет, то оно простое и тем самым является искомым простым делителем. Если же есть и другие делители, то берём из этих других наименьший. Если бы он делился ещё на что-то, кроме единицы и самого себя, то это что-то было бы ещё меньшим делителем исходного числа, что невозможно.  
Требуется доказать, что среди трёхзначных чисел нет числа, делящегося одновременно на 7, 11 и 13. Школьник младших классов, знакомый лишь с делением, может справиться с этой задачей, перебрав и испробовав все 900 трёхзначных чисел. Школьник старших классов знает (точнее— должен знать), что среди натуральных чисел выделяются простые числа и что простым называется всякое такое натуральное число, которое, во-первых, больше единицы и, во-вторых, делится только на единицу и на само себя. Так что числа 7, 11 и 13 — простые. А ежели школьник ещё более образован, то он знает, что число, делящееся на каждое из нескольких простых чисел, обязано делиться и на их произведение. Произведение  $7 \cdot 11 \cdot 13$  равно 1001. Но никакое трёхзначное число не может делиться на 1001.
39. В обыденной жизни нередко встречаются задачи, которые имеют несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, важно не упустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществлять перебор всех возможных вариантов или подсчитывать их число. Задачи, требующие такого решения, называются комбинаторными.
40. В комбинаторике, которая возникла раньше теории множеств, правило нахождения числа элементов объединения двух непересекающихся конечных множеств называют правилом суммы и формулируют в таком виде: Если объект  $a$  можно выбрать  $m$  способами, а объект  $b$  —  $k$  способами (не такими, как  $a$ ), то выбор «либо  $a$ , либо  $b$ » можно осуществить  $m+k$  способами. Задача 1. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод? Решение. По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин — четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе «либо яблоко, либо апельсин», то его, согласно правилу суммы, можно осуществить  $5 + 4 = 9$  способами. Правило нахождения числа элементов декартова произведения двух множеств называют в комбинаторике правилом произведения и формулируют в таком виде: Если объект  $a$  можно выбрать  $m$  способами, а объект  $b$  —  $k$  способами, то пару  $(a, b)$  можно выбрать  $m \cdot k$  способами. Правило суммы и произведения, сформулированные для двух объектов, можно обобщить и на случай  $t$  объектов.
41. Определение. Размещение без повторений из  $k$  элементов по  $t$  элементов — это кортеж, составленный из  $t$  неповторяющихся элементов множества, в котором  $k$  элементов. Число всевозможных размещений без повторений из  $k$  элементов по  $t$  элементов

обозначают  $m A_k$  и подсчитывают по формуле.

$$A_k^m = k(k-1) \dots (k-m+1).$$

Определение. Сочетание без повторения из  $k$  элементов по  $m$  элементов – это  $m$ -

$$C_k^m = \frac{A_k^m}{m!} = \frac{k!}{m!(k-m)!}.$$

элементное подмножество множества, содержащего  $k$  элементов.

Число перестановок без повторений из  $k$  элементов обозначают  $P_k$  и подсчитывают по формуле  $P_k = k!$ , где  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$  и читают « $k$  факториал».

Считают, что  $1! = 1$ ,  $0! = 1$ . Например,  $5! = 120$ ;  $7! = 5040$ .

Таким образом, перестановки без повторений – это частный случай размещения без повторений.

42. Используя цифры 7, 4 и 5, можно образовать различные двузначные числа: 77, 74, 75, 47, 44, 45, 57, 54, 55. В записи этих чисел цифры повторяются. С теоретико-множественной точки зрения запись любого двузначного числа – это кортеж длины 2. Записывая различные двузначные числа с помощью цифр 7, 4 и 5, мы по сути дела образовывали из данных трех цифр различные кортежи длины 2 с повторяющимися элементами. В комбинаторике такие кортежи называют размещениями с повторениями из трех элементов по два элемента. Задача. Сколько всевозможных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5, так, чтобы цифры в записи числа не повторялись. Решение. В задаче рассматриваются размещения без повторений из трех элементов по три, и их число можно подсчитать по формуле:

$$A = 3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

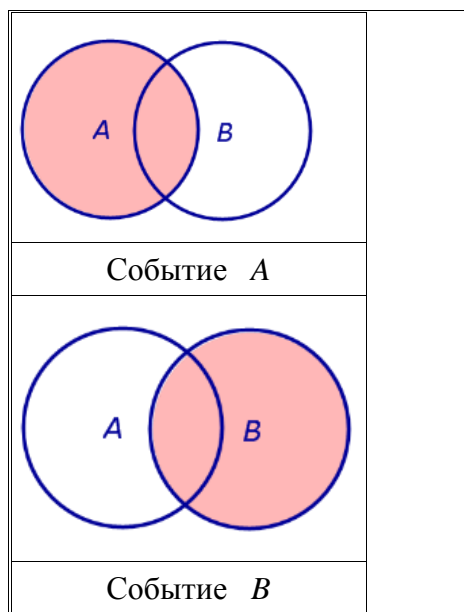
Эти числа таковы: 745, 754, 475, 457, 547, 574

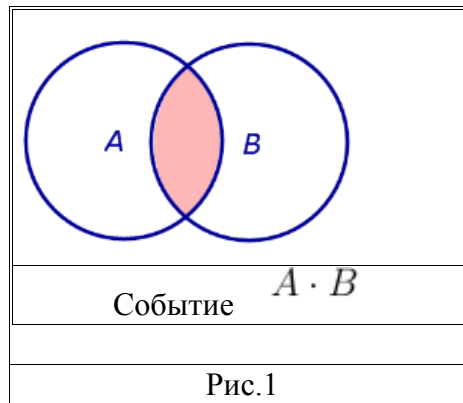
43. *Произведение (пересечение) двух событий*

Операцию произведения (пересечения) двух событий  $A$  и  $B$  обозначают

$$A \cdot B, \text{ или } AB, \text{ или } A \cap B.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Произведением (пересечением) двух событий  $A$  и  $B$  называют такое событие, которое состоит из всех элементов, входящих как в событие  $A$ , так и в событие  $B$  (рис. 1).



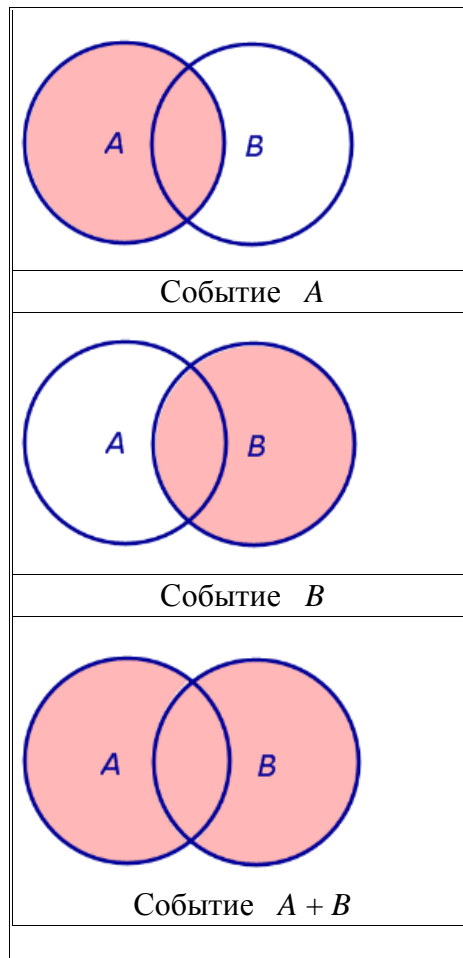


*Сумма (объединение) двух событий*

Операцию суммы (объединения) двух событий  $A$  и  $B$  обозначают

$$A + B \text{ или } A \cup B$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Суммой (объединением) двух событий  $A$  и  $B$  называют такое событие, которое состоит из элементов события  $A$  и элементов события  $B$  (рис. 2).



44. Суммой двух событий  $A + B$  называется событие, состоящее в появлении события  $A$  или  $B$  или обоих этих событий.  
 Теорема 1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.  

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$
 Данную строку можно прочесть следующим образом: вероятность появления события  $A$  или  $B$ , или обоих этих событий равна сумме вероятностей этих событий.
45. Теорема 2. Сумма вероятностей всех событий, образующих полную группу, равна единице.



$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1.$$

*Пример 7.*

Студент после занятий может пойти: домой с вероятностью  $p_1=0,4$ , в библиотеку с вероятностью  $p_2=0,1$ , в спортзал с вероятностью  $p_3=0,2$  и в кино с вероятностью  $p_4=?$ .  
Определить  $p_4$ .

Решение.

Эти четыре события несовместны и образуют полную группу. Сумма вероятностей событий  $p_1, p_2, p_3$  равна:

$$p_1+p_2+p_3=0,4+0,1+0,2=0,7.$$

По формуле получим  $p_4=1-0,7=0,3$ .

46. Теорема 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Если вероятность события  $P(A)$  обозначить через  $p$ , а события  $P(\bar{A})$  через  $q$ , то формулу (4.4) можно записать в виде:

$$p + q = 1.$$

*Пример 8.*

Студент может сдать экзамен с вероятностью  $p=0,9$ . Какова вероятность, что студент не сдаст экзамен?

Решение.

Эти два события противоположны и образуют полную группу.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна:  $q = 1-p = 0,1$ .

47. Безусловная вероятность - это вероятность события без каких-либо ограничений; она может даже рассматриваться как отдельная вероятность. Условная вероятность, напротив, является вероятностью события, с учетом того, что произошло другое событие.
48. Несколько событий называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если: а) независимы любые два из них; б) любое из них и произведение любого количества из остальных независимы. Замечание. Для независимости в совокупности нескольких событий недостаточно их попарной независимости. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вероятность события  $A$ , вычисленная при условии, что событие  $B$  произошло, называется условной вероятностью события  $A$  и обозначается  $P(A|B)$ . Из определения независимости событий получаем, что  $A$  и  $B$  – независимые  $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$ ,  $P(B|A) = P(B)$ .
49. Теорему умножения вероятностей можно обобщить на любое конечное число событий. ТЕОРЕМА 4 (обобщение теоремы умножения вероятностей). Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других; при этом условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли:  $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$ . СЛЕДСТВИЕ 5. Вероятность произведения независимых событий  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  равна произведению вероятностей этих событий:  $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n)$ .
50. ТЕОРЕМА 10 (сложения вероятностей совместных событий). Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ . ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИМЕР Прибор состоит из двух блоков, дублирующих друг друга (т.е. блоки подсоединены параллельно). Найти надежность (вероятность безотказной работы) прибора, если надежность первого блока  $0,8$ , второго блока –  $0,7$ .
51. Случайная величина – величина, которая в результате опыта может принимать то или

иное значение, причём заранее неизвестно какое.

52. Случайные величины бывают непрерывными и дискретными и обозначаются как  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и так далее. Их численные значения обозначаются, как  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и так далее.

53.

Соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называют законом распределения дискретной случайной величины.

Закон распределения можно задать в виде таблицы, формулы или графически.

При табличном задании закона распределения в первой строке таблицы записываются возможные значения случайной величины, а во второй – соответствующие значениям вероятности:

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$p$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

Такая таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины  $X$ .

Так как случайная величина в результате испытания примет одно и только одно значение, то события:  $X=x_1$ ,  $X=x_2$ , ...,  $X=x_n$  образуют полную группу. Следовательно, из следствия 1 теоремы сложения вероятностей сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{k=1}^n p_k = 1.$$

54. Произведением случайной величины  $X$  на постоянную величину  $k$  называется случайная величина  $Z$ , которая принимает значения  $kx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  с теми же вероятностями  $p_i$ :

$$P(Z = kx_i) = p_i.$$

$m$ -й степенью случайной величины  $X$  называется случайная величина  $X^m$ , которая принимает значения  $x_i^m$  с теми же вероятностями  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$P(X^m = x_i^m) = p_i.$$

Суммой случайных величин  $X$  и  $Y$  называется случайная величина  $Z = X + Y$ ,

принимаящая все значения вида  $z_k = x_i + y_j$  с

вероятностями  $p_{ij} = P((X = x_i) \cdot (Y = y_j))$ .

Разностью случайных величин  $X$  и  $Y$  называется случайная величина  $Z = X - Y$ ,

принимаящая все значения вида  $z_k = x_i - y_j$  с

вероятностями  $p_{ij} = P((X = x_i) \cdot (Y = y_j))$ .

Произведением случайных величин  $X$  и  $Y$  называется случайная величина  $Z = X \cdot Y$ ,

принимаящая все значения вида  $z_k = x_i \cdot y_j$  с

вероятностями  $p_{ij} = P((X = x_i) \cdot (Y = y_j))$ .

Если  $X$  и  $Y$  – независимы, то  $p_{ij} = p_i \cdot q_j$ .

55. Числовые параметры, которые описывают СВ суммарно и в сжатой форме выражают наиболее существенные особенности распределения, называются числовыми характеристиками СВ. Основные числовые характеристики СВ: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

56. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

57. Свойства математического ожидания:

1.  $M(C) = C$ ,  $C - const.$
2.  $M(kX) = kM(X).$
3.  $M(X \pm Y) = M(X) + M(Y).$
4.  $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$ , если  $X, Y$  – независимы.
5.  $M(X - M(X)) = 0.$

58. Вероятностный смысл этой числовой характеристики таков: математическое ожидание случайной величины приближенно равно среднему значению случайной величины.

59. Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонений от математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсия может быть рассчитана по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

60. Свойства дисперсии:

1.  $D(C) = 0$ ,  $C - const.$
2.  $D(kX) = k^2 D(X).$
3.  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ , если  $X, Y$  – независимы.

61. Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением) случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Медианой дискретной случайной величины называется возможное значение случайной величины, слева и справа от которого в ряде распределения случайной величины одинаковое число значений случайной величины.

62. Модой дискретной случайной величины называется возможное значение случайной величины, которое имеет наибольшую соответствующую вероятность.

63. Функцией распределения случайной величины (интегральной) называют функцию, определяющую для каждого значения  $x$  вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение меньше, чем  $x$ :

$$F(x) = P(X < x).$$

64. Свойства функции распределения

1.  $0 \leq F(x) \leq 1.$
2.  $F(x)$  – монотонно не убывает: если  $x_2 > x_1$ , то  $F(x_2) \geq F(x_1).$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$
4.  $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$

65. Пусть дискретная случайная величина  $X$  задана своим законом распределения:

$X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$\dots$	$P_n$

Многоугольником распределения вероятностей данной величины называют ломаную, звенья которой соединяют соседние точки  $(x_i, P_i)$ .

66.

Стандартное обозначение:  $F(x)$

И для дискретной, и для непрерывной случайной величины она определяется одинаково:

$F(x) = P(X < x)$ , где  $P(X < x)$  – вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем переменная  $x$ , которая «пробегает» все действительные значения (от «минус» до «плюс» бесконечности).

Смысл функции распределения хорошо иллюстрирует наша любимая игра:

$X$	-5	2,5	10
	0,5	0,4	0,1

Чему, например, равно значение  $F(-20)$ ? Это вероятность того, что выигрыш будет меньше, чем -20. И это невозможное событие:  $F(-20) = P(X < -20) = 0$ .

Совершенно понятно, что  $F(x) = 0$  и для всех «икс» из интервала  $(-\infty, -5)$ , а также для  $x = -5$ . Почему? По определению функции распределения:

$F(-5) = P(X < -5) = 0$  – вы согласны? Функция  $F(x)$  возвращает вероятность того, что в точке  $x = -5$  выигрыш будет СТРОГО МЕНЬШЕ «минус» пяти.

Таким образом:  $F(x) = 0$ , если  $x \leq -5$ .

На интервале  $-5 < x < 2,5$  функция  $F(x) = P(X < x) = 0,5$ , поскольку левее любой точки этого интервала есть только одно значение  $x_1 = -5$  случайной величины, которое появляется с вероятностью 0,5. Кроме того, сюда же следует отнести точку  $x = 2,5$ , так как:

$F(2,5) = P(X < 2,5) = 0,5$  – очень хорошо осознайте этот момент!

Таким образом, если  $-5 < x \leq 2,5$ , то  $F(x) = 0,5$

Далее рассматриваем промежуток  $2,5 < x \leq 10$ . СТРОГО ЛЕВЕЕ любой точки этого промежутка находятся два выигрыша  $x_1 = -5, x_2 = 2,5$ , поэтому:

$$F(x) = P(X < x) = 0,5 + 0,4 = 0,9$$

И, наконец, если  $x > 10$ , то  $F(x) = P(X < x) = 0,5 + 0,4 + 0,1 = 1$ ,

ибо все значения  $x_1 = -5, x_2 = 2,5, x_3 = 10$  случайной величины  $X$  лежат строго левее любой точки  $x \in (10, +\infty)$

Заметим, кстати, важную вещь: коль скоро

функция  $F(x)$  характеризует вероятность, то она может принимать значения лишь из промежутка  $0 \leq F(x) \leq 1$  – и никакие другие!

Итак, функция распределения вероятностей ДСВ является *кусочной* и, как многие знают, в таких случаях принято использовать фигурные скобки:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -5 \\ 0,5, & \text{если } -5 < x \leq 2,5 \\ 0,9, & \text{если } 2,5 < x \leq 10 \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

67. Случайная величина  $X$  называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, может быть отдельных точек.

Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю:

$P(X = x) = 0$ , если  $X$  – непрерывная случайная величина.

Для непрерывной случайной величины справедливо равенство:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2).$$

68. Плотностью вероятности (дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины называется производная ее функции распределения:

$$\varphi(x) = F'(x).$$

Для непрерывной случайной величины справедливо равенство:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

69. Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx.$$

Свойства дифференциальной функции распределения:

1.  $\varphi(x) \geq 0$ .
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$ .

70. Зная плотность распределения  $f(x)$ , можно найти функцию распределения  $F(x)$  по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Действительно,  $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$ .

Следовательно,

$$P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Или

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Таким образом, зная плотность распределения, можно найти функцию распределения. Разумеется, по известной функции распределения можно найти плотность распределения, а именно:

$$F(X) = F'(X).$$

71.

Функция ПЛОТНОСТИ распределения вероятностей

или дифференциальная функция распределения. Она представляет собой производную функции распределения:  $f(x) = F'(x)$ .

*Примечание: для дискретной случайной величины такой функции не существует*

В нашем примере:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} (0)', & \text{если } x < 0 \\ \left(\frac{x^2}{9}\right)', & \text{если } 0 \leq x \leq 3 \\ (1)', & \text{если } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \frac{2x}{9}, & \text{если } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Настоящий порядок состоит в том, что несобственный интеграл от  $f(x)$  с пределами интегрирования от «минус» до «плюс» бесконечности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

– равен единице, и строго единице. В противном случае перед нами не функция плотности, и если эта функция найдена как производная, то  $F(x)$  – не является функцией распределения (*несмотря на какие бы то ни было другие признаки*).

72.

Математическое ожидание дискретной случайной величины есть сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

*Свойства математического ожидания.*

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой величине:

$$M(C) = C$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C \cdot M(X)$$

3) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$$

4) Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n)$$

*Дисперсия дискретной случайной величины* есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - M(X))^2 p_n = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n - [M(X)]^2$$

*Свойства дисперсии.*

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю:  $D(C) = 0$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:  $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$

3) Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:  $D(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$

*Среднее квадратическое отклонение* дискретной случайной величины, оно же стандартное отклонение или среднее квадратичное отклонение есть корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

*Мода дискретной случайной величины*  $M_0(X)$  - это значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность. На многоугольнике распределения мода - это абсцисса самой высокой точки. Бывает, что распределение имеет не одну моду.

Математическим ожиданием  $M(X)$  дискретной случайной величины  $X$  называется сумма произведений всех ее возможных значений и соответствующих им

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \cdot$$

вероятностей:

Модой дискретной случайной величины, обозначаемой  $M_0$ , называется ее наиболее вероятное значение.

Медианой случайной величины  $X$  называется такое ее значение  $M_e$ , для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше  $M_e$ , т.е.  $P(X < M_e) = P(X > M_e)$ .

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:  $D(X) = M(X - M(X))^2$ .

Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M(X))^2 p_i \quad \text{или} \quad D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (M(X))^2.$$

Средним квадратическим отклонением (стандартом) случайной

величины  $X$  называется арифметический корень из дисперсии, т.е.  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

73. Математическая статистика — наука, которая разрабатывает математические методы систематизации и применения статистических данных для практических и научных выводов. Отрасль тесно связана с математическим аппаратом и с теорией вероятности: часто статистика использует те же формулы и методы. Она помогает описывать данные, анализировать их, строить прогнозы — для этого существуют свои методики и разделы статистики.
74. Генеральная совокупность  
Совокупность всех потенциально возможных вариантов, которые можно получить при одинаковых условиях. Измерить генеральную совокупность нельзя, ее размер

стремится к бесконечности. Но математическая статистика использует методы, которые помогают понять, как описать ее, — для этого используется выборка.

**Выборка**

Данные, которые получены при наблюдениях. Размер выборки конечен и ограничен критериями — методами отбора. Таким образом выбирают множество вариантов из генеральной совокупности, по которым в теории можно сделать вывод о целом.

Например, если генеральная совокупность — мнение абсолютно всех людей по вопросу, то выборка — результаты опроса по нему.

75. Понятие, которое говорит, насколько показательна выборка, реалистично ли в ней распределены варианты. Выборка считается репрезентативной, если в ней учтено множество параметров и она достоверно отражает генеральную совокупность.
76. Показатель часто описывают через математические формулы. Он показывает частоту, с которой в выборке встречаются разные варианты. В результате можно сделать вывод о том, каких вариантов данных больше, каких меньше — что больше или меньше распространено внутри выборки. Если она репрезентативная, это поможет сделать выводы и о генеральной совокупности.
77. Чтобы результаты воспринимались легче, их визуализируют. Обычно строят гистограммы распределения — диаграммы со столбцами, размер которых различается в зависимости от значения. Но применяют и другие виды визуализации: точечные графики, круговые диаграммы и так далее.
78. Распределения обычно недостаточно, чтобы сделать подробные выводы. Поэтому у вариантов внутри выборки есть ряд характеристик, которые нужны для большей наглядности. Это, например:
- Среднее арифметическое**  
— усредненное значение среди всех показателей.
- Медиана**  
— значение, которое находится посередине распределения, то есть фактическое среднее.
- Мода**  
— значение, которое встречается в выборке чаще всего.
- Размах**  
— разница между минимальным и максимальным значением.
- Дисперсия**  
— отклонение значений от среднего арифметического.
- Коэффициент вариации**  
— значение, которое показывает рассеяние результатов в процентах.
79. В зависимости от формулировки статистических гипотез различают параметрические и непараметрические статистические гипотезы. Предположение, которое касается неизвестного значения параметра распределения, входящего в некоторое параметрическое семейство распределений, называется параметрической гипотезой (напомним, что параметр может быть и многомерным). Большинство параметрических методов разработаны для нормально распределенных совокупностей. Некоторые методы позволяют анализировать данные, распределенные по другим законам (например, биномиальному или Пуассона). Предположение, при котором вид распределения не рассматривается (т.е. не предполагается, что оно входит в некоторое параметрическое семейство распределений), называется непараметрической гипотезой.
80. *Статистической* называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.



Например, статистическими являются гипотезы:

- 1) генеральная совокупность распределена по закону Пуассона;
- 2) дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй — о параметрах двух известных распределений.

Гипотеза «на Марсе есть жизнь» не является статистической, поскольку в ней не идет речь ни о виде, ни о параметрах распределения.

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.

*Нулевой (основной)* называют выдвинутую гипотезу  $Y_0$ .

*Конкурирующей (альтернативной)* называют гипотезу  $Y_1$ , которая противоречит нулевой.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание  $a$  нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении, что  $a \neq 10$ . Коротко это записывают так:  $Y_0: a = 10$ ;  $Y_1: a \neq 10$ .

Различают гипотезы, которые содержат только одно и более одного предположений.

*Простой* называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Например, если  $X$  — параметр показательного распределения, то гипотеза  $Y_0: X = 5$  — простая.

Гипотеза  $H$ : математическое ожидание нормального распределения равно 3 (а известно) — простая.

*Сложной* называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, сложная гипотеза  $H: X > 5$  состоит из бесчисленного множества простых вида  $Y: X = B$ , где  $B$  — любое число, большее 5. Гипотеза  $Y_0$ : математическое ожидание нормального распределения равно 3 (а неизвестно) — сложная.

81. Ошибка первого рода ( $\alpha$ -ошибка, ложноположительное заключение) — ситуация, когда отвергнута верная нулевая гипотеза (об отсутствии связи между явлениями или искомого эффекта).  
Ошибка второго рода ( $\beta$ -ошибка, ложноотрицательное заключение) — ситуация, когда принята неверная нулевая гипотеза.  
Данные понятия являются ключевыми в задачах проверки статистических гипотез в математической статистике.
82. Статистический критерий служит для проверки нулевой гипотезы. Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия принимают отношение исправленных выборочных дисперсий.
83. Наблюдаемым значением критерия  $Z_{\text{набл}}$  называют значение критерия, вычисленное по выборкам. Например, если по двум выборкам найдены выборочные дисперсии  $d_1=27$ ;  $d_2=9$ , то наблюдаемое значение критерия равно отношению большей исправленной дисперсии к меньшей:
- $$z_{\text{набл}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{27}{9} = 3.$$
84. Критической областью называют совокупность значений критерия  $Z$ , при которых нулевую гипотезу отвергают. Областью принятия гипотез называют совокупность значений критерия  $Z$ , при которых нулевую гипотезу принимают.
85. Основной принцип статистической проверки гипотез заключается в следующем:
- Если наблюдаемое значение критерия  $Z_{\text{набл}}$ , вычисленное по данным выборки, принадлежит критической области, то гипотезу отвергают.

- Если наблюдаемое значение не принадлежит критической области, то нет оснований отвергать гипотезу.

86. Критическими точками (границами) –  $z_{кр}$  называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают три вида критической области:

- правосторонняя, определяемая неравенством  $Z > z_{кр} > 0$ ;
- левосторонняя, определяемая неравенством  $Z < z_{кр} < 0$ ;
- двусторонняя, определяемая неравенством  $Z < -z_{кр} ; Z > z_{кр}$ .

В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенством  $|Z| > z_{кр} > 0$ . При отыскании критической области задаются достаточно малой вероятностью – уровнем значимости  $\alpha$  и ищут критические точки, исходя из требования, чтобы вероятность того, что критерий  $Z$  примет значения, лежащие в критической области, была равна принятому уровню значимости. В результате получают:

- для правосторонней критической области:
 
$$P(Z > z_{кр}) = \alpha; \tag{7.1}$$
- для левосторонней критической области  $P(Z < z_{кр}) = \alpha$ ;
- для двусторонней симметричной области  $P(Z > z_{кр}) = \alpha/2$ .

87. Проверка дискретного распределения на нормальность  
 Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариантов и соответствующих им частот:

			...	
			...	

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность распределена нормально.

Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:

1. Вычислить выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение.
2. Вычислить теоретические частоты

где  $n$  – объем выборки,  $h$  – шаг (разность между двумя соседними вариантами)

3. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:

а) составляют расчетную таблицу (см. пример), по которой находят наблюдаемое значение критерия

б) по таблице критических точек распределения, по заданному уровню значимости и числу степеней свободы (– число групп выборки) находят критическую точку правосторонней критической области.

Если  $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$  – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Если  $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$  – гипотезу отвергают.

Проверка интервального распределения на нормальность  
 Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот.

		...	
--	--	-----	--

		...	
--	--	-----	--

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность распределена нормально.

Для того, чтобы при уровне значимости проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:

1. Вычислить выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение, причем в качестве вариантов принимают среднее арифметическое концов интервала:

2. Пронормировать, то есть перейти к случайной величине

и вычислить концы интервалов:

причем наименьшее значение, то есть полагают равным, а наибольшее, то есть полагают равным.

3. Вычислить теоретические частоты:

где – объем выборки

– вероятности попадания в интервалы

– функция Лапласа.

4. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона.

Для этого:

а) составляют расчетную таблицу (см. пример), по которой находят наблюдаемое значение критерия

б) по таблице критических точек распределения, по заданному уровню значимости и числу степеней свободы (– число групп выборки) находят критическую точку правосторонней критической области.

Если – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Если – гипотезу отвергают.

88. Критерий Пирсона, или критерий  $\chi^2$  (Хи-квадрат) - применяют для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения предполагаемому теоретическому распределению  $F(x)$  при большом объеме выборки ( $n \geq 100$ ). Критерий применим для любых видов функции  $F(x)$ , даже при неизвестных значениях их параметров, что обычно имеет место при анализе результатов механических испытаний. В этом заключается его универсальность. Использование критерия  $\chi^2$  предусматривает разбиение размаха варьирования выборки на интервалы и определения числа наблюдений (частоты) для каждого из интервалов. Для удобства оценок параметров распределения интервалы выбирают одинаковой длины. Число интервалов зависит от объема выборки. Недостатком критерия согласия Пирсона является потеря части первоначальной информации, связанная с необходимостью группировки результатов наблюдений в интервалы и объединения отдельных интервалов с малым числом наблюдений. В связи с этим рекомендуется дополнять проверку соответствия распределений по критерию  $\chi^2$  другими критериями. Особенно это необходимо при сравнительно малом объеме выборки ( $n \approx 100$ ).
89. Алгоритм — это последовательность команд, предназначенная исполнителю, в результате выполнения которой он должен решить поставленную задачу. Алгоритм должен описываться на формальном языке, исключая неоднозначность

толкования.

Исполнитель — это человек, компьютер, автом. устройство и т. д. Исполнитель должен уметь выполнять все команды, составляющие алгоритм. Множество возможных команд конечно и изначально строго задано. Действия, которые выполняет исполнитель по этим командам называются элементарными. Запись алгоритма на формальном языке называется программой.

90. Алгоритмы бывают трёх типов:
1. последовательный — действия выполняются по порядку друг за другом;
  2. циклический — организует повторение действий;
  3. разветвляющийся — содержит одно или несколько логических условий и имеет несколько ветвей обработки.
  - 4.
- 91.
1. Дискретность. Процесс решения задачи должен быть разбит на последовательность отдельных шагов-команд, которые выполняются одна за другой. Только после завершения одной команды начинается выполнение следующей.
  2. Понятность. Алгоритм должен содержать только те команды, которые известны исполнителю.
  3. Детерминированность. Каждый шаг и переход от шага к шагу должны быть точно определены, чтобы его мог выполнить любой другой человек или механическое устройство. У исполнителя нет возможности принимать самостоятельное решение (алгоритм выполняется *формально*).
  4. Конечность. Обычно предполагают, что алгоритм заканчивает работу за конечное число шагов. Результат работы алгоритма также должен быть получен за конечное время. Можно расширить понятие алгоритма до понятия процесса, который по различным каналам получает данные, выводит данные и потенциально может не заканчивать свою работу.
  5. Массовость. Алгоритм должен решать не одну частную задачу, а класс задач.
92. Формировать умение строить алгоритмы – это значит развивать умение и навык планирования своих действий, умение объяснить ход действий другого, умение разделять сложные действия на понятные простые действия, умение читать и записывать алгоритм. Надо иметь представление о том, в какой степени мышление, память, интересы, представления о мире младшего школьника отличаются от С.Н.Захарова • «умения расчленять сложные действия на элементарные шаги и представлять их в виде организованной совокупности последних, умение планировать свои действия и строго придерживаться этого плана в своей деятельности, умение выражать свои действия понятными языковыми средствами» [19, С. 31]. О.А. Ивашова • «алгоритмические умения по своей сути имеют аналогичную структуру со структурой учебной деятельности: целеполагание, планирование, выполнение, контроль и коррекцию» [21, С. 50]. А. А. Столяр • «Алгоритмические умения включают умения расчленять сложные действия на элементарные шаги и представлять их в виде организованной совокупности последних, умение планировать свои действия и строго придерживаться этого плана в своей деятельности, умения выражать свои действия понятными языковыми средствами» [33, С. 87]. 19 мировоззрения взрослых. Сначала у детей формируется понятие по тем представлениям, с чем это понятие ассоциируется, с чем похожим был опыт. Какие эмоции были при взаимодействии с тем предметом. Если они понимают, что он им интересен и пригодится в будущем, они будут и дальше охотно изучать его, поэтому надо подходить творчески к этой теме. Красочные презентации или рассмотрение последовательности действий сказочных героев привлекут внимание детей. Даже в знакомых нам с детства книжках есть такие сюжеты, где легко можно описать по порядку: что сначала сделал герой, что потом. Так

как в нашей работе речь идет о формировании алгоритмических умений младших школьников, надо учесть особенности развития детей младшего школьного возраста: их физические и психологические возрастные особенности: особенности мышления, познавательной активности, волевой регуляции. Главные процессы мышления: анализ и синтез слабо развиты, так как дети плохо еще знают признаки предметов и явлений. Они не принимают во внимание свойства предметов и отношения между ними. Чтобы подготовить детей к восприятию алгоритма, надо тренировать их мышление заданиями на отношения, последовательности и связи между предметами (Рис. 8). Рисунок 8 – Примеры заданий с иллюстрациями 20 На рисунке 8 при работе с иллюстрацией, которая расположена слева, младшим школьникам надо предложить «представьте, как самолет обгоняет поезд, это потому что у него лучше мотор, скорость у самолета больше». Можно задать вопросы: на чем быстрее долетишь до Ставрополя, на самолете или на поезде? Мы знаем, что поезд идет медленнее. Это легче представить с картинкой. На рисунке 8, который расположен на иллюстрации справа, изображены: противень на котором много блинов и порции по три блина. Это поможет ребенку в восприятии и осознании условия задачи, при работе с иллюстрацией им легче будет представить, как блины делят на порции. В 1 и 2 классе дети лучше понимают и запоминают на наглядных примерах, так как развита наглядно-образная память лучше, чем словесно-логическая и из-за этого им трудно воспринимать словесные описания и определения. В 3-4 классе мышление из наглядно-образного постепенно переходит в словесно-логическое, для того чтобы ученики скорее научились мыслить абстрактно, задания должны быть и с наглядной картинкой, и еще этот же материал в другом виде: таблицей, схемой, диаграммой, графиком. У человека несколько видов мышления и все они развиваются поразному. У некоторых детей равномерно развиты все виды мышления, а у 21 других какое-то мышление задействовано лучше. В конце начальных классов у одних детей формируется уже теоретическое мышление (им легко воспринимать информацию словесно), а другим нужно опираться на практику и наглядность, у третьих - образное мышление. Поэтому учебный материал должен предоставляться на уроке в разных формах С началом обучения у ребенка изменяется и мышление : от нагляднообразного оно переходит в абстрактно – логическое, то есть он начинает понимать закономерности и причинно – следственные связи. Память из произвольной переходит в произвольную и осмысленную (специально заучивают). В ходе обучения ребенок привыкает контролировать себя, обращает внимание на свое поведение, привыкает концентрировать внимание и память привыкает к постоянным нагрузкам. Изучая научную литературу, мы обратили внимание на интересный факт: когда проводили эксперимент, оказалось, что ученики начальной школы лучше справляются с простыми алгоритмами, чем студенты, потому что у них линейное мышление, а студенты, увидев простое задание, начинают искать варианты ответов, им кажется не должно так просто, тут 22 где-то подвох, надо подумать. Так происходит потому что, у них развитое алгоритмическое мышление, и они привыкли думать разветвлено. Если вспомнить басню Крылова «Ларчик», ведь там мудрец и механик искали что-то сложное: защелки, замки потайные, а ларчик просто открывался, то есть не было у него защелки. Где-то есть легкие способы решения проблемы, а мы усложняем из-за своего типа мышления и опыта. И там мудрец думал, что его позвали не для простого дела, и из-за этого просто взять и открыть крышку он не догадался. В младшем школьном возрасте у детей другое восприятие мира, не как у взрослых, они лучше адаптируются к изменениям в окружающих условиях, и у них высокий познавательный интерес, они не так сильно боятся сделать ошибки они, как экспериментаторы ставят опыты, пробуют, учатся на ошибках. Некоторые специально выдумывают в этом возрасте свой язык слова, буквы иероглифами, они сами ищут чего-то нового, им нравятся разгадывать ребусы, головоломки. Этот возраст как раз подходит для обучения алгоритмам. Предлагать задания на развитие алгоритмических

умений можно в проблемной форме или в виде опыта

## 5.2 Практические задания

**Практическое задание 1.** Упражнения «Отношения между множествами».

1. В следующих примерах выписать буквы, обозначающие множества в таком порядке, чтобы каждая предыдущая обозначала подмножество следующего:
  - а)  $A$  – множество всех четырехугольников,  $B$  – множество всех ромбов;
  - б)  $A$  – множество всех кубов,  $B$  – множество всех параллелепипедов,  $C$  – множество всех призм;
  - в)  $A$  – множество всех чисел, делящихся на 3,  $B$  – множество всех чисел, делящихся на 9,  $C$  – множество всех чисел, делящихся на 18;
  - г)  $N$  - множество натуральных чисел;  $Z$  - множество целых чисел;  $R$  - множество действительных чисел.

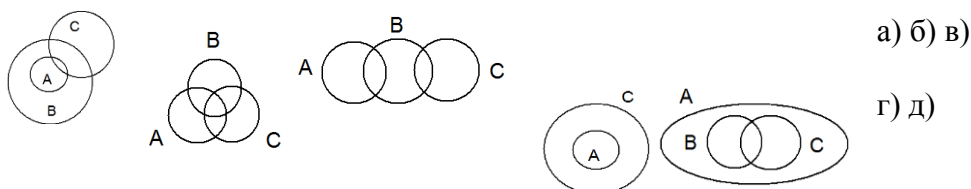
2. Найти подмножества следующих множеств:

- а)  $D = \{0,1\}$ ; б)  $M = \{0,1,2\}$ ; в)  $C = \{1,2,5\}$ .

Дано множество  $A = \{5, 10, 15, 25\}$ . Запишите два множества, равные множеству  $A$ .

3. Известно, что каждый элемент множества  $A$  содержится в множестве  $B$ . Верно ли, что тогда: а)  $A \subset B$ ; б)  $A = B$ ?

4. Приведите примеры множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ , если их изображение таково, как на рисунках:



5. Установите, в каком отношении находятся множества  $A$  и  $B$  и изобразите их при помощи кругов Эйлера, если:

- а)  $A$  – множество четных чисел,  $B$  – множество чисел, кратных 7;
- б)  $A$  – множество четных чисел,  $B$  – множество чисел, кратных 4;
- в)  $A$  – множество четных чисел,  $B$  – множество чисел, кратных 2;
- г)  $A$  – множество четных чисел,  $B$  – множество нечетных чисел.

**Практическая работа 2.** Упражнения «Отношения над множествами».  
задача №1

В олимпиаде по математике для абитуриентов приняло участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 20 человек, по геометрии – 18 человек, по тригонометрии – 18 человек.

По алгебре и геометрии решили 7 человек, по алгебре и тригонометрии – 9 человек. Ни одной задачи не решили 3 человека.

1. Сколько учащихся решили все задачи?
2. Сколько учащихся решили только две задачи?
3. Сколько учащихся решили только одну задачу?

#### Задача № 2

Первую или вторую контрольные работы по математике успешно написали 33 студента, первую или третью – 31 студент, вторую или третью – 32 студента. Не менее двух контрольных работ выполнили 20 студентов.

Сколько студентов успешно решили только одну контрольную работу?

#### Задача № 3

В классе 35 учеников. Каждый из них пользуется хотя бы одним из видов городского транспорта: метро, автобусом и троллейбусом. Всеми тремя видами транспорта пользуются 6 учеников, метро и автобусом – 15 учеников, метро и троллейбусом – 13 учеников, троллейбусом и автобусом – 9 учеников.

Сколько учеников пользуются только одним видом транспорта?

#### Решение задачи № 1

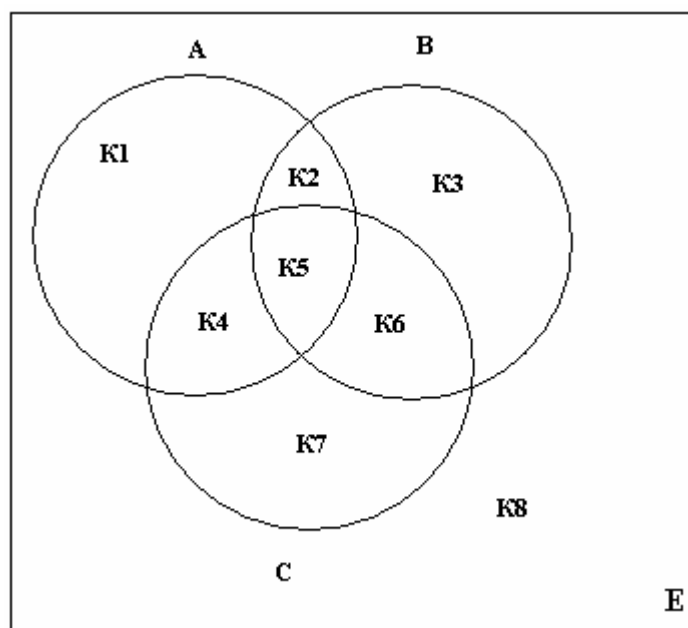
Запишем коротко условие и покажем решение:

- $m(E) = 40$
- $m(A) = 20$
- $m(B) = 18$
- $m(C) = 18$
- $m(A \cap B) = 7$
- $m(A \cap C) = 8$
- $m(B \cap C) = 9$

---

$$m(A \cup B \cup C) = 3 \Rightarrow m(A \cup B \cup C) = 40 - 3 = 37$$

Обозначим разбиение универсального множества  $E$  множествами  $A, B, C$  (рис.5).



(рис.5)

K1 – множество учеников, решивших только одну задачу по алгебре;

K2 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и геометрии;

K3 – множество учеников, решивших только задачу по геометрии;

K4 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и тригонометрии;

K5 – множество всех учеников, решивших все три задачи;

K6 – множество всех учеников, решивших только две задачи, по геометрии и тригонометрии;

K7 – множество всех учеников, решивших только задачу по тригонометрии;

K8 – множество всех учеников, не решивших ни одной задачи.

Используя свойство мощности множеств и рисунок можно выполнить вычисления:

- $m(K5) = m(A \cap B \cap C) = m(A \cup B \cup C) - m(A) - m(B) - m(C) + m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C)$
- $m(K5) = 37 - 20 - 18 - 18 + 7 + 8 + 9 = 5$
- $m(K2) = m(A \cap B) - m(K5) = 7 - 5 = 2$
- $m(K4) = m(A \cap C) - m(K5) = 8 - 5 = 3$
- $m(K6) = m(B \cap C) - m(K5) = 9 - 5 = 4$
- $m(K1) = m(A) - m(K2) - m(K4) - m(K5) = 20 - 2 - 3 - 5 = 10$
- $m(K3) = m(B) - m(K2) - m(K6) - m(K5) = 18 - 2 - 4 - 5 = 7$
- $m(K7) = m(C) - m(K4) - m(K6) - m(K5) = 18 - 3 - 4 - 5 = 6$
- $m(K2) + m(K4) + m(K6) = 2 + 3 + 4 = 9$  – число учеников решивших только две задачи;
- $m(K1) + m(K3) + m(K7) = 10 + 7 + 6 = 23$  – число учеников решивших только одну задачу.

Ответ:

5 учеников решили три задачи;



9 учеников решили только по две задачи;

23 ученика решили только по одной задаче.

С помощью этого метода можно записать решения второй и третьей задачи так:

Решение задачи № 2

- $m(A \cup B) = 33$
- $m(A \cup C) = 31$
- $m(B \cup C) = 32$
- $m(K2) + m(K4) + m(K6) + m(K5) = 20$

Найти  $m(K1) + m(K3) + m(K7)$

- $m(A \cup B) = m(K1) + m(K2) + m(K3) + m(K4) + m(K5) + m(K6) = m(K1) + m(K3) + 20 = 33 \Rightarrow$
- $m(K1) + m(K3) = 33 - 20 = 13$
- $m(A \cup C) = m(K1) + m(K4) + m(K2) + m(K5) + m(K6) + m(K7) = m(K1) + m(K7) + 20 = 31 \Rightarrow$
- $m(K1) + m(K7) = 31 - 20 = 11$
- $m(B \cup C) = m(K3) + m(K2) + m(K5) + m(K6) + m(K7) + m(K4) = m(K3) + m(K7) + 20 = 32 \Rightarrow$
- $m(K3) + m(K7) = 32 - 20 = 12$
- $2m(K1) + m(K3) + m(K7) = 13 + 11 = 24$
- $2m(K1) + 12 = 24$
- $m(K1) = \frac{24 - 12}{2} = 6$
- $m(K3) = 13 - 6 = 7$
- $m(K7) = 12 - 7 = 5$
- $m(K1) + m(K3) + m(K7) = 6 + 7 + 5 = 18$

Ответ:

Только одну контрольную работу решили 18 учеников.

Решение задачи № 3

- $m(E) = 35$
- $m(A \cap B \cap C) = m(K5) = 6$
- $m(A \cap B) = 15$
- $m(A \cap C) = 13$
- $m(B \cap C) = 9$

Найти  $m(K1) + m(K3) + m(K7)$

- $m(K2) = m(A \cap B) - m(K5) = 15 - 6 = 9$
- $m(K4) = m(A \cap C) - m(K5) = 13 - 6 = 7$
- $m(K6) = m(B \cap C) - m(K5) = 9 - 6 = 3$
- $m(K1) + m(K3) + m(K7) = m(E) - m(K4) - m(K2) - m(K6) - m(K5) = 35 - 7 - 9 - 3 - 6 = 10$

Ответ:

Только одним видом транспорта пользуется 10 учеников.

**Практическое задание 3.** Объем и содержание математического понятия. Отношения между понятиями.

1. Назвать определяемое понятие (термин).
2. Указать ближайшее родовое (по отношению к определяемому) понятие.
3. Перечислить свойства, выделяющие определяемые объекты из объема родового, т.е. сформулировать видовое отличие.
4. Проверить, выполнены ли правила определения понятия (соразмерно ли оно, нет ли порочного круга и т.д.).

**Практическое задание 4.** Определение математических понятий.

1. Начертите три геометрические фигуры, принадлежащие объему понятия: а) параллелограмм; б) трапеция; в) окружность.
2. Назовите пять существенных свойств понятия: а) треугольник; б) круг.
3. Каков объем понятия: а) однозначное число; б) натуральное число; в) луч?
4. Назовите несколько свойств, общих для прямоугольника и квадрата. Какое из следующих утверждений верно: а) Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику. б) Всякое свойство прямоугольника присуще квадрату?
5. Находятся ли в отношении рода и вида следующие пары понятий: а) многоугольник и треугольник; б) угол и острый угол; в) луч и прямая; г) ромб и квадрат; д) круг и окружность?
6. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между объемами понятий а, в и с, если: а) а – «четыреугольник», в – «трапеция», с – «прямоугольник»; б) а – «натуральное число, кратное 3», в – «натуральное число, кратное 4», с – «натуральное число»; в) а – «треугольник», в – «равнобедренный треугольник», с – «равносторонний треугольник».



7. Приведите примеры понятий, отношения между которыми изображены на рисунке.



а) б)

8. Среди понятий, изучаемых в начальном курсе математики, есть такие, как «четное число», «треугольник», «многоугольник», «число», «трехзначное число», «прямой угол», «сумма», «слагаемое», «выражение». Есть ли среди них понятия, находящиеся в отношении: а) рода и вида; б) целого и части?
9. Какие свойства понятий «прямоугольник» и «сложение» изучают в начальном курсе математики?
10. Переформулируйте следующие определения, используя слова «тогда и только тогда, когда»:

а) Четным называется число, которое делится на 2.

б) Множество А называется подмножеством множества В, если каждый элемент множества А принадлежит множеству В.

в) Множества А и В называются равными, если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ .

г) Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков.

11. В следующих определениях выделите определяемое и определяющее понятие, родовое понятие (по отношению к определяемому) и видовое отличие: а)

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны; б) Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его средней линией.

12. Назовите все свойства, которые содержатся в видовом отличии каждого из следующих определений: а) Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла и делящий угол пополам; б) Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

13. Соразмеримы ли следующие определения: а) Остроугольным треугольником называется треугольник, у которого есть острый угол; б) Прямоугольным треугольником называется треугольник, у которого есть прямой угол.

14. Учащийся определил прямой угол, стороны которого взаимно перпендикулярны, а взаимно перпендикулярные прямые как прямые, образующие при пересечении прямые углы. Какую ошибку допустил учащийся?

15. Есть ли логические ошибки в следующих определениях? Если есть, то исправьте их.

а) Прямоугольником называется четырехугольник, у которого противоположные стороны равны.

б) Биссектрисой угла называется прямая, делящая угол пополам.

в) Сложением называется действие, при котором числа складываются.

г) Равносторонним треугольником называется треугольник, у которого равны все стороны и все углы.

д) Параллелограммом называется многоугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

16. Дайте определение: тупоугольного треугольника, равнобедренного треугольника, трапеции. Какие понятия вы выбрали в качестве родового в каждом случае? Какие свойства включили в видовое отличие?

**Практическое задание 5.** Высказывания и высказывательные формы.

**Практическое задание 6.** Элементарные высказывания. Логические связки. Составные высказывания.

Высказыванием в математике называют предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно.

Например, предложения 1, 2, 4, 5 и 6 приведенные выше, есть высказывания, причем предложения 1, 4, 5 и 6 – истинные, 2 – ложное.

Высказывания принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: А, В, С, ..., Z. Если высказывание А истинно, то записывают: А – «и», если же высказывание А – ложно, то пишут: А – «л».

«Истина» и «ложь» называются значениями истинности высказывания. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно, быть одновременно тем и другим оно не может.

Предложение  $x+5=8$  называется высказывательной формой. Оно порождает множество высказываний одной и той же формы. Одноместной высказывательной формой, заданной на множестве X, называется предложение с переменной, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной из множества X.

Среди всех возможных значений переменной нас в первую очередь интересуют те, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание. Множество таких значений переменных называют множеством истинности высказывательной формы.

Слова «и», «или», «если ..., то...», «тогда и только тогда, когда», а также частицу «не» (слова «неверно, что») называются логическими связками. Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют составными. Предложения, не являющиеся составными, называют элементарными.

**Практическое задание 7.** Высказывания с кванторами. Значения истинности высказываний, содержащих кванторы.

**Практическое задание 8.** Структура теорем. Виды теорем. Закон контрапозиции.

**Практическое задание 9.** Умозаключения и их виды.

**Практическое задание 10.** Схемы дедуктивных умозаключений.

В состав истинного логического произведения входят три простых высказывания - А,В,С. известно, что А и В - истинны. Может ли высказывание С быть одним из следующих:

- а) “Дважды два равно семи”.
- б) “Слоны живут в Африке и Индии”.
- в) “ $5x + 3 = 11x$ ”.

Ответ:

- а). нет
- б). да
- в). нет

5. Дано высказывание: “Иванов является членом сборной команды “Алгоритм”. Какое из следующих высказываний есть логическим отрицанием данного?

- а). Не Иванов является членом сборной команды “Алгоритм”.
- б). Иванов является членом сборной команды не “Алгоритм”.
- в). Иванов не является членом сборной команды “Алгоритм”.
- г). Неверно, что Иванов является членом сборной команды “Алгоритм”.

Ответ:

- а). нет
- б). нет
- в). да
- г). да

6. Определите значения истинности высказываний:

- а). “Если 16 делится на 4, то 16 делится на 2”
- б). “Если 17 делится на 4, то 17 делится на 2”
- в). “Если 18 делится на 4, то 18 делится на 2”
- г). “Если 18 делится на 2, то 18 делится на 4”
- д). “Если  $2 \cdot 2 = 5$ , то  $83 \neq 500$ ”
- е). “Если  $2 \cdot 2 = 4$ , то  $72 = 81$ ”
- ж). “Если телепатия существует, то некоторые физические законы требуют пересмотра”
- з). “16 делится на 4 тогда и только тогда, когда 16 делится на 2”
- и). “17 делится на 4 тогда и только тогда, когда 17 делится на 2”
- к). “18 делится на 4 тогда и только тогда, когда 18 делится на 2”
- л). “15 делится на 5 тогда и только тогда, когда 15 делится на 10”

Ответ:

- а). истинно;

- б). истинно;
- в). истинно;
- г). ложь;
- д). истинно;
- е). ложь;
- ж). истинно;
- з). истинно;
- и). истинно;
- к). ложь;
- л). ложь.

**Практическое задание 11.** Правила суммы и произведения. Размещения и сочетания.

#### ПРИМЕР 1

Монету подбросили 3 раза. Сколько различных результатов бросаний можно ожидать?

#### РЕШЕНИЕ

Первая монета имеет  $n_1 = 2$  альтернативы – либо орел, либо решка. Для второй монеты также есть  $n_2 = 2$  альтернативы и т.д., т.е.  $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ .

Искомое количество способов:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 2^3 = 8$$

---

#### ПРИМЕР 2

На полке 30 книг, из них 20 математических, 6 технических и 4 экономических. Сколько существует способов выбора одной математической или одной экономической книги.

#### РЕШЕНИЕ

Математическая книга может быть выбрана  $n_1 = 20$  способами, экономическая -  $n_2 = 4$  способами.

По правилу суммы существует  $N = n_1 + n_2 = 20 + 4 = 24$  способа выбора математической или экономической книги.

---

### ПРИМЕР 3

Расписание дня состоит из 5 различных уроков. Определите число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

### РЕШЕНИЕ

Каждый вариант расписания представляет набор 5 дисциплин из 11, отличающихся от других вариантов как составом, так и порядком следования. поэтому:

$$N = A_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55440$$

---

### ПРИМЕР 4

Сколькими способами можно рассадить 4 человек за одним столом?

### РЕШЕНИЕ

Каждый вариант рассадки отличается только порядком участников, то есть является перестановкой из 4 элементов:

$$N = P_4 = 4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

### Практическое задание 12. Вероятность события и её вычисление.

Пример. Подбрасывание игральной кости один раз. Событие А состоит в том, что выпавшее число очков – чётно. В этом случае  $N=6$  – число граней куба;  $M=3$  – число граней с чётными номерами; тогда  $P(A)=3/6=1/2$ .

Пример. Подбрасывание симметричной монеты 2 раза. Событие А состоит в том, что выпало ровно 2 герба. В этом случае  $N=4$ , т.к.  $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$ ;  $M=1$ , т.к.  $A=\{ГГ\}$ . Тогда  $P(A)=1/4$ .

Пример. Вытягивание шара из урны, содержащей 2 белых и 3 чёрных шара. Событие А состоит в том, что вытянули чёрный шар. В этом случае  $N=2+3=5$  (общее число шаров в урне),  $M=3$  (число чёрных шаров), тогда  $P(A)=3/5$ .

### Практическое задание 13. Элементы комбинаторики и теории вероятности.

Пример. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры. Какова вероятность того, что он с первого раза наберёт эти цифры правильно, если он помнит, что они различны?

Решение. Обозначим А – событие, состоящее в том, что абонент, набрав произвольно две цифры, угадал их правильно. М – число правильных вариантов, очевидно, что  $M=1$ ;  $N=$

число различных цифр,  $N = A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$ . Таким образом,  
 $P(A) = M/N = 1/90$ .

Пример. Шесть шариков случайным образом располагаются в шести ящиках так, что для каждого шарика равновероятно попадание в любой ящик и в одном ящике может находиться несколько шариков. Какова вероятность того, что в каждом ящике окажется по одному шарiku?

Решение. Событие А – в каждом ящике по одному шарiku. М – число вариантов распределения шариков, при которых в каждый ящик попадает по одному шарiku,  $M=6!$  (число способов переставить между собой 6 элементов). N– общее число вариантов  $N=6^6$  (так как каждый шарик может попасть в каждый из ящиков). В результате

$$P(A) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5! \cdot 6}{6^6} = \frac{5!}{6^5}.$$

получаем

Пример. В урне 3 белых и 4 чёрных шара. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим: А – событие, состоящее в появлении белых шаров; N– число

способов вытащить 2 шара из 7;  $N = C_7^2$ ; M– число способов вытащить 2 белых шара из имеющихся 3 белых шаров;  $M = C_3^2$ .

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{2! \cdot 5! \cdot 3!}{7! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{3!}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7}$$

**Практическое задание 14.** Задачи математической статистики. Генеральная и выборочные совокупности. Статистическое распределение выборки. Полигон и гистограмма.



## Тема: Вариационный ряд, графическое изображение, характеристики

Задание. Дан следующий вариационный ряд

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	1	1	2	2	4	4	4	5	5	5

Требуется

- 1) Построить полигон распределения
- 2) Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану.
- 3) Построить выборочную функцию распределения
- 4) Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

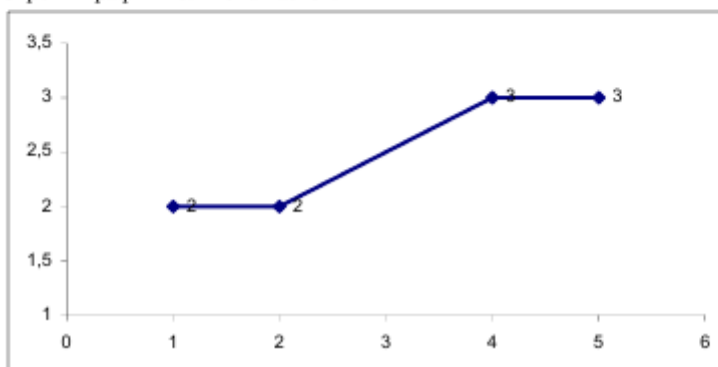
Решение. В задании дана выборка объема  $n = 10$ .

1) Полигон распределения – это зависимость абсолютной частоты варианта  $m_i$  от

значения варианта  $x_i$ . Эту зависимость можно представить в виде таблицы:

$x_i$	1	2	4	5
$m_i$	2	2	3	3

Строим график полигона частот:



**Практическое задание 15.** Выполнение упражнений на первичную статистическую обработку информации и результатов исследований, графическое представление данных.

2) Вычислим выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану.

Выборочная средняя:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i m_i = \frac{1}{10} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3) = \frac{33}{10} = 3,3.$$

Выборочная дисперсия

$$D_x = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 m_i - 3,3^2 = \frac{1}{10} (1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 25 \cdot 3) - 3,3^2 = 2,41.$$

Выборочное среднееквадратичное отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{2,41} \approx 1,552.$$

Мода равна варианту, имеющему наибольшую частоту:  $x_{Mo} = 4; 5$  (две моды)

Медиана равна среднему варианту выборки:  $x_{Me} = 4$ .

3) Выборочная функция распределения аналогична функции распределения дискретной случайной величины. Для ее нахождения запишем ряд распределения выборки, где

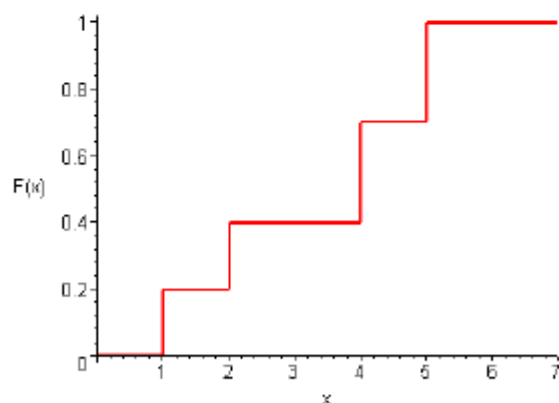
$$p_i = \frac{m_i}{n} = \frac{m_i}{10} - \text{относительная частота варианта } x_i.$$

$x_i$	1	2	4	5
$p_i$	0,2	0,2	0,3	0,3

Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0,2, & 1 < x \leq 2, \\ 0,4, & 2 < x \leq 4, \\ 0,7, & 4 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Построим график:



4) Несмещенная оценка математического ожидания совпадает с выборочной средней:

$$M(X) = \bar{x} = 3,3.$$

Несмещенная оценка дисперсии отличается от выборочной дисперсии в большую

$$\text{сторону: } D(X) = \frac{n}{n-1} D_x = \frac{10}{9} 2,41 \approx 2,678.$$

**Практическое задание 16.** Проведение опытно-экспериментальной работы по формированию умения строить простейшие алгоритмы на уроках математики в начальной школе.

Проанализируем рабочую программу по математике в начальной школе (1-4 классы) и рассмотрим, как формируются эти умения в течение четырех лет начальной школы  
Составим таблицу

Таблица 6 - Развитие алгоритмических умений младших школьников с 1 по 4 классы (УМК «Школа России»)

Алгоритмическое умение (АУ)	Уровень развития АУ в 1 классе	Уровень развития АУ во 2 классе	Уровень развития АУ в 3 классе	Уровень развития АУ в 4 классе
прочтение алгоритмов	Сравнение предметов, сравнение двух групп предметов: (больше, меньше, столько же) Пользоваться знаками $>$ $<$ $=$ Читать равенства используя математическую терминологию (слагаемые, сумма и т.д.) <i>словесная форма записи алгоритма</i>	Уравнения вида $12+x=12$ $25-x=20$ представление текста задачи в виде рисунка, схемы, таблицы и др. <i>словесная форма записи алгоритма</i>	Представление информации в табличной форме и диаграммах. Таблицы умножения и деления. Алгоритмы арифметических действий. <i>словесная и табличная форма записи алгоритма</i>	Алгоритмы устного и письменного сложения и вычитания многозначных чисел, Алгоритмы письменного умножения и деления многозначных чисел <i>словесная и табличная форма записи алгоритма</i>
различие алгоритма и не алгоритма;	Составлять равенства и неравенства, составлять по рисункам схемы сложения и вычитания		Сравнивать разные способы вычислений и выбирать удобный	
действовать по предложенному алгоритму	Выполнять сложение и вычитание Упорядочивание событий (раньше, позже, еще позднее)	Использовать приемы и правила о порядке выполнения действий сложение и вычитание и нахождение неизвестного умножение и деление (1-100)	Приемы умножения и деления, приемы нахождения частного и остатка, Алгоритм письменного сложения и вычитания, умножения и деления(многозначного числа на однозначное)	Алгоритмы сложения и вычитания многозначных чисел. Алгоритмы умножения и деления многозначных чисел.

самостоятельно составлять план действий и следовать плану при решении задач	составлять план решения задач в два действия. схематические рисунки к задаче, прием сложения и вычитания графическими схемами <i>используется краткая запись, схемы</i>	Составлять план работы и решения задачи. Моделировать с помощью чертежей связи между данными и искомым, моделировать зависимость между пропорциональными величинами. Объяснять ход решения задачи	составлять план решения задач представление текста задачи в виде рисунка, схемы, таблицы и др.	План решения текстовых задач. Схематические рисунки, схемы и чертежи.
Усвоение алгоритмов выполнения арифметических действий и решения задач.	Моделирование расположения объектов (вверху, внизу, справа, слева, за...) алгоритм измерения величины	алгоритм нахождения неизвестного компонента арифметического действия	алгоритмы письменного сложения и вычитания, умножения и деления чисел алгоритм порядка выполнения действия алгоритм проверки результата алгоритм построения отрезка и т.п.	алгоритмы письменного сложения и вычитания, умножения и деления многозначных чисел Объяснять каждый шаг в алгоритмах, Текстовые задачи

### 3.4. 5.3 Самостоятельная работа

#### Раздел 1. Элементы логики

##### Тема 1.1-1.4

- Подготовка сообщений по темам: понятие множества, элементы множества, подмножества, круги Эйлера;

Множество — это совокупность любых объектов. Множества обозначают большими буквами латинского алфавита — от *A* до *Z*.

Основные числовые множества: множество натуральных чисел и множество целых чисел, всегда обозначаются одними и теми же буквами:

*N* — множество натуральных чисел,

*Z* — множество целых чисел.

Элемент множества — это любой объект, входящий в состав множества. Принадлежность объекта к множеству обозначается с помощью знака  $\in$ . Запись

$$5 \in Z$$

читается так: 5 принадлежит множеству  $Z$  или 5 – элемент множества  $Z$ .

Множества делятся на конечные и бесконечные. Конечное множество — множество, содержащее определённое (конечное) количество элементов. Бесконечное множество — множество, содержащее бесконечно много элементов. К бесконечным множествам можно отнести множества натуральных и целых чисел.

Для определения множества используются фигурные скобки, в которых через запятую перечисляются элементы. Например, запись

$$L = \{2, 4, 6, 8\}$$

означает, что множество  $L$  состоит из четырёх чётных чисел.

Термин множество употребляется независимо от того, сколько элементов оно содержит. Множества не содержащие ни одного элемента называются пустыми.

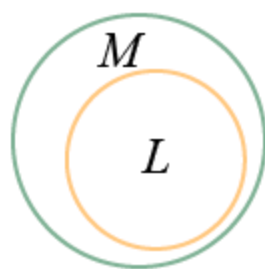
Подмножество

Подмножество — это множество, все элементы которого, являются частью другого множества.

Визуально продемонстрировать отношение множества и входящего в него подмножества можно с помощью кругов Эйлера. Круги Эйлера — это геометрические схемы, помогающие визуализировать отношения различных объектов, в нашем случае, множеств.

Рассмотрим два множества:

$$L = \{2, 4, 6, 8\} \text{ и } M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}.$$



Каждый элемент множества  $L$  принадлежит и множеству  $M$ , значит, множество  $L$  является подмножеством множества  $M$ . Такое соотношение множеств обозначают знаком  $\subset$ :

$$L \subset M.$$

Запись  $L \subset M$  читается так: множество  $L$  является подмножеством множества  $M$ .

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, независимо от их порядка, называются равными и обозначаются знаком  $=$ .

Рассмотрим два множества:

$$L = \{2, 4, 6\} \text{ и } M = \{4, 6, 2\}.$$

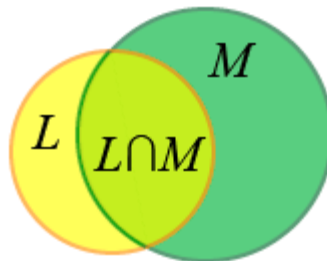
Так как оба множества состоят из одних и тех же элементов, то  $L = M$ .

Пересечение и объединение множеств

Пересечение двух множеств — это совокупность элементов, принадлежащих каждому из этих множеств, то есть их общая часть. Пересечение обозначается знаком  $\cap$ .

Например, если

$$L = \{1, 3, 7, 11\} \text{ и } M = \{3, 11, 17, 19\}, \text{ то } L \cap M = \{3, 11\}.$$



Запись  $L \cap M$  читается так: пересечение множеств  $L$  и  $M$ .

Из данного примера следует, что пересечением множеств называется множество, которое содержит только те элементы, которые встречаются во всех пересекающихся множествах.

Объединением двух множеств называется множество, содержащее все элементы исходных множеств в единственном экземпляре, то есть если один и тот же элемент встречается в обоих множествах, то в новое множество этот элемент будет включён только один раз. Объединение обозначается знаком  $\cup$ .

Например, если

$$L = \{1, 3, 7, 11\} \text{ и } M = \{3, 11, 17, 19\},$$

$$\text{то } L \cup M = \{1, 3, 7, 11, 17, 19\}.$$



Запись  $L \cup M$  читается так: объединение множеств  $L$  и  $M$ .

При объединении равных множеств объединение будет равно любому из данных множеств:

если  $L = M$ , то  $L \cup M = L$  и  $L \cup M = M$ .

- Решение задач на «распознавание» при формировании математических понятий;

1. Что нужно сделать, чтобы проверить непустоту понятий: а) «параллельные прямые», б) «прямоугольник», в) «число 1000000».
2. Объясните, почему следующее определение разности множеств является широким: «разностью множеств  $A \setminus B$  называется множество элементов  $A$ , не принадлежащих  $B$ ».
3. Понятие «противоположные стороны прямоугольника» в начальном курсе математики можно определить так: «Красным цветом обозначены две противоположные стороны прямоугольника. А синим цветом – две другие противоположные стороны» (все это показано на рисунке). Какой способ определения понятия использован?
4. Выясните, каким способом определяются в различных учебниках по математике для начальных классов понятия: а) выражение; б) четное число; в) сумма; г) однозначное число; д) слагаемое; е) умножение.

- Решение заданий по темам «Высказывания, логические операции над высказываниями»;

Задание: придумать примеры этих структур

- Конъюнкция  $A \wedge B$  может выражаться так:
  1. Не только  $A$ , но и  $B$
  2.  $B$  хотя и  $A$
  3.  $B$ , несмотря на  $A$
  4. Как  $A$ , так и  $B$
  5.  $A$  вместе с  $B$
  6.  $A$  в то время как  $B$ .

- Решение заданий по темам «Высказывательные формы (предикаты), логические операции над предикатами»;

Высказывания. Простые и сложные высказывания.

1. Какие предложения являются высказываниями?

а)  $3+2=5$ ;

б) Не шуметь!

в)  $y^2 \geq 0$ ;

г) Окружностью называется множество всех точек на плоскости, расстояние которых до данной точки этой плоскости имеет

заданную величину.

д) Число символов в этом предложении равно 7.

е)  $3 < 2$ ;

ж) Войдите!

Ответ: а, д, е.

2. Установите: какие из следующих предложений являются истинными, а какие - ложными высказываниями:

а) “Число 123 меньше числа -124”.

б) “Все треугольники равнобедренные”.

в) “Сумма чисел 4 и z равна 15”.

г) “ $(13-2*4)*4=-7$ ”.

Ответ: истинные – а; ложные – б, г. В – не является высказыванием.

3. Даны высказывания:

А: “Математическая логика - важная наука”

В: “ВТ построена на законах математической логики”

Образуйте из данных высказываний сложные и подчеркните слова, при помощи которых они образованы.

Ответ: А и В; А или В; если А, то В; тогда и только тогда А, когда В; неверно что, А и В.

4. Среди приведенных ниже высказываний укажите сложные;

выделите в них простые, обозначив каждое из них буквой.

Запишите с помощью букв каждое сложное высказывание.

а) “На уроке логики учащиеся отвечали на вопросы учителя и писали самостоятельную работу”.

б) “Мы пойдем кататься на коньках или на лыжах”.

в) “Если в данном четырехугольнике диагонали имеют равную



длину, то этот четырехугольник - ромб”.

г) “ $-17 \leq 0$ ”.

д) “Число 15 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 3”.

Ответ:

Сложные высказывания : а), в), д).

а) С: «На уроке логики учащиеся отвечали на вопросы учителя»

D: «Учащиеся писали самостоятельную работу”.

$C \wedge D$

в) А: «В данном четырехугольнике диагонали имеют равную длину»

В: «Этот четырехугольник – ромб».

$A \rightarrow B$

д) X: «Число 15 делится на 3»

Y: «Сумма цифр числа 15 делится на 3”.

$X \leftrightarrow Y$

- Определение значения истинности высказываний, обучение учащихся способам обоснования истинности высказываний (дедуктивные рассуждения, эксперимент, вычисления, измерения).

1. Даны простые высказывания:

А: “Петя умеет плавать”

В: “Сергей умеет прыгать”

С: “Алеша умеет стрелять”

Даны формулы сложных высказываний, составленные из этих простых. Прочтите их, используя смысл каждого простого высказывания:

1.  $A \vee B \cdot \bar{C}$  4.  $A \cdot \bar{B} \cdot C$

$$2. \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \quad 5. A \cdot \overline{C} \cdot \overline{B}$$

$$3. A \cdot B \cdot \overline{C} \quad 6. \overline{A \cdot B \cdot C}$$

Ответ:

1. Алеша не умеет стрелять и Сергей умеет прыгать или Петя умеет плавать.
2. Петя не умеет плавать и Алеша не умеет стрелять и Сергей умеет прыгать.
3. Алеша не умеет стрелять и Петя умеет плавать и Сергей умеет прыгать.
4. Сергей не умеет прыгать и Петя умеет плавать и Алеша умеет стрелять.
5. Алеша не умеет стрелять и Сергей не умеет прыгать и Петя умеет плавать.
6. Неверно что, Петя умеет плавать и Сергей умеет прыгать и Алеша умеет стрелять.

2. Даны простые высказывания:

- А: “Данное число не кратное 3”

В: “Данное число больше 50”

Прочтите сложные высказывания:

$$1). A \overline{B} \quad 2). \overline{A \overline{B}} \quad 3). \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Ответ:

1. Данное число не больше 50 и данное число не кратное 3.
2. Неверно, что данное число не кратное 3 и данное число больше 50.
3. Данное число кратное 3 и данное число не больше 50.

## *Раздел 2. Математическая статистика.*

### *Тема 2.1-2.2*

- Решение комбинаторных задач, соответствующих специфике профессиональной деятельности;

1. Подготовительный этап, цель которого формирование мыслительных операций в процессе решения комбинаторных задач с помощью хаотического перебора.

На подготовительном этапе предлагаются задачи на развитие познавательных способностей, на активизацию таких мыслительных процессов как анализ, синтез, обобщение и классификация. Это задачи-игры и «жизненные» задачи (задачи, решаемые в повседневной деятельности человека). Например, для обеспечения мотивации решения комбинаторных задач можно предложить детям задачу-игру «День-ночь», «Башенки». Подобные игры с успехом можно проводить во время физминутки.

«Жизненные» задачи», показывающие возможность применения комбинаторики в повседневной деятельности человека также направлены на формирование простых мыслительных операций. Например, интерес у ребят вызывает следующая задача: «У кассы кинотеатра стоят четверо ребят. У двух из них сторублевые купюры, у других двух – пятидесятирублевые. Как должны расположиться ребята, чтобы никому не пришлось ждать сдачи?» В ходе решения задача обыгрывается: к доске вызываются 4 учеников, получающие модели купюр. Билет в кино стоит 50 рублей. В начале продажи касса пуста. (Вызываю «кассира» и даю ему «билеты»). Находим два возможных варианта решения: 1. – 50 рублей, 100 рублей, 50 рублей, 100 рублей; 2 – 50 рублей, 50 рублей, 100 рублей, 100 рублей. Данные задачи могут предлагаться утомившимся учащимся в конце урока математики.

Таким образом, на подготовительном этапе создается положительная мотивация, происходит эмоциональная подготовка учащихся к дальнейшему решению более сложных комбинаторных задач.

2. Целью второго основного этапа обучения младших школьников решению комбинаторных задач является ознакомление учащихся с новыми видами комбинаторных задач: задачами, решаемыми методом организованного перебора; с помощью таблиц; с помощью графов; с помощью дерева возможных вариантов.

При знакомстве школьников с ходом решения задач методом организационного перебора важно обучить детей выполнять перебор не хаотически, а соблюдая определенную последовательность рассмотрения всех вариантов решений.

Перед тем, как знакомить учащихся с новым способом решения комбинаторных задач – с помощью таблиц, необходимо актуализировать знания детей о таблицах, выделить существенные признаки таблиц и сформулировать определение понятия «таблица», например такое: таблица – это перечень сведений, числовых данных, приведенных в определенную систему и разнесенных по графам (строкам и столбцам). Примеры задач, решаемых с помощью таблиц:

«Запиши в нужные клетки таблицы следующие числа: 23, 32, 11, 31, 22, 33, 13. Какие числа нужно записать в оставшиеся клетки?»

- Проверка статистических гипотез. Критерий Пирсона;

Критерий согласия Пирсона (или критерий  $\chi^2$  - "хи квадрат") - наиболее часто употребляемый для проверки гипотезы о принадлежности некоторой выборки теоретическому закону распределения (в учебных задачах чаще всего проверяют "нормальность" - распределение по нормальному закону).

В учебных задачах обычно используется следующий алгоритм:

1. Выбор теоретического закона распределения (обычно задан заранее, если не задан - анализируем выборку, например с помощью гистограммы относительных частот, которая имитирует плотность распределения).
2. Оцениваем параметры распределения по выборке (для этого вычисляется математическое ожидание и дисперсия):  $a, \sigma$ , для нормального,  $a, b$ , - для равномерного,  $\lambda$  - для распределения Пуассона и т.д.
3. Вычисляются теоретические значения частот (через теоретические вероятности попадания в интервал) и сравниваются с исходными (выборочными).
4. Анализируется значение статистики  $\chi^2$  и делается вывод о соответствии (или нет) теоретическому закону распределения.

**ЗАДАНИЕ.** Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности  $X$  по результатам выборки:

$X$  0,3 0,5 0,7 0,9 1,1 1,3 1,5 1,7 1,9 2,1 2,3  
 $N$  7 9 28 27 30 26 21 25 22 9 5

**РЕШЕНИЕ.**

Наблюдаемое значение критерия вычислим по формуле  $\chi^2_{\text{наб}} = \sum_{i=1}^{11} \frac{(n_i - n_i^0)^2}{n_i^0} = 15,491$ .

По таблице критических значений  $\chi^2_{\text{кр}}$  при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и числе степеней свободы  $k = l - 3 = 11 - 3 = 8$  найдем  $\chi^2_{\text{кр}} \approx 15,507$ . Так как  $\chi^2_{\text{наб}} = 15,491 < \chi^2_{\text{кр}} = 15,507$ , нулевую гипотезу о нормальном распределении можно принять при данном уровне значимости.

- Проверка гипотезы о виде распределения генеральной совокупности.

*Раздел 3. Алгоритмы и их свойства.*

*Тема 3.1.*

- Решение тренировочных заданий на развитие алгоритмического мышления.

1. Алгоритмы письменного сложения и вычитания.

Письменный алгоритм сложения содержит:

- 1) Правило записи слагаемых при письменном сложении: разряд записывается под соответствующим разрядом.
- 2) Указание на порядок выполнения действий: сложение начинаем с разряда единиц (справа налево).
- 3) Прием добавления накапливающихся единиц старших разрядов в соответствующий разряд после выполнения основного сложения.

Алгоритм письменного сложения и вычитания в начальной школе вводится во 2 классе на примере сложения и вычитания двузначных чисел в пределах сотни.

Сначала детей знакомят со способом записи чисел при выполнении письменных вычислений и определяют порядок выполнения вычислений (справа налево, начиная с разряда единиц). В учебнике приводятся подробные объяснения приема вычислений:

- 1) Пишу десятки под десятками, а единицы под единицами.
- 2) Складываю (вычитаю) единицы (ед.). Пишу ответ под единицами.
- 3) Складываю (вычитаю) десятки (дес.). Пишу ответ под десятками.
- 4) Читаю ответ.

## 2. Алгоритмы письменного умножения и деления.

### Письменное умножение на однозначное число.

Учебник математики для 3 класса содержит подробное описание процесса умножения «в столбик», пошагово оговаривающее каждое умственное действие по выполнению умножения и сложения получаемых отдельных сумм:

Алгоритм нахождения произведения:

- 1) Умножаю ед.
- 2) Ед. пишу под ед., а дес. запоминаю и прибавляю их к дес. после умножения дес..
- 3) Умножаю дес., прибавляю дес., которые были получены при умножении ед. Пишу дес. под десятками, а сотни (сот.) запоминаю и прибавляю их к сот. после умножения сотен.
- 4) Умножаю сотни. К сот. прибавляю сот., которые были получены при умножении десятков. Пишу сот. под сотнями, тысячи (тыс.) под тысячами.
- 5) Читаю ответ.

### Письменное деление на однозначное число

Учебник математики для 3 класса содержит подробное описание процесса деления «в столбик», пошагово оговаривающее каждое умственное действие по выполнению подбора и проверки цифр частного, нахождения количества разделенных разрядных единиц, нахождения остатка:

#### Деление 748 на 2

1. Делю сотни: 7 сот. делю на 2, можно взять по 3 сот. В частном будет 3 сот. Проверяю, сколько сотен разделилось:  $3 \text{ сот.} \cdot 2 = 6 \text{ сот.}$  Нахожу остаток от деления сотен:  $7 \text{ сот.} - 6 \text{ сот.} = 1 \text{ сот.}$

2. Делю десятки: 1 сот. = 10 дес. и еще 4 дес. - это 14 дес. 14 дес. Делю на 2 - можно взять по 7. Записываю в частном 7 в разряде десятков.  $7 \text{ дес.} \cdot 2 = 14 \text{ дес.}$  Нахожу остаток:  $14 \text{ дес.} - 14 \text{ дес.} = 0$ . Десятки разделились все.

3. Делю единицы - единиц 8. 8 делю на 2, можно взять по 4.

Проверяю:  $4 \cdot 2 = 8$ . Пишу в частном 4 в разряде единиц. Единицы

разделились все:  $8 - 8 = 0$ . Остатка нет. Деление закончено.

4. Читаю ответ: 374.